This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

3 3433 06633054 3

CHE
Lobo

TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL;

PAR

M. LE PROFESSEUR S.-F. LUBBE.

TRADUIT DE L'ALLEMAND,

Et augmenté de plusieurs Notes et Solutions;

PAR MAURICE KARTSCHER.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

PARIS,
BACHELIER PÈRE ET FILS,
LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1832

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

PRÉFACE

DU TRADUCTEUR.

L'ouvrage sur le Calcul différentiel et le Calcul intégral qui a paru il y a quelques années sous le titre : *Lehrbuch des höhern Kalkuls, für Lehrer und Selbstlernende. Herausgegeben von Professor Samuel Ferdinand Lubbe, Privatdozent an der Universitaet zu Berlin. Mit* 20 *Figuren. Berlin bey G. Hayn.* 1825. 8°, se distingue si avantageusement entre tant d'autres écrits sur le même sujet, qu'il mérite, sous plusieurs rapports, une attention particulière du public. Tout dérive dans cet ouvrage d'un même principe d'où l'auteur déduit, d'une manière facile et concise, toutes les théories et propositions. Ce point important du haut calcul est en évidence dès les premières pages ; on y découvre un vrai système qui, fondé sur une base solide et naturelle, montre clairement la même exactitude et la même évidence, dans toutes les recherches jusqu'à la solution des plus pénibles problèmes. En effet, pourquoi après tant de discussions sur la métaphysique du calcul, après tant

de travaux des plus grands géomètres, comme Euler, Lagrange, Lacroix, Carnot, Fontaine, après tant d'expositions lumineuses sur la nature de la différentielle, ne pourrait-on pas s'attendre à voir les théories de ce genre traitées avec la même évidence que celle de l'analyse élémentaire, même à la portée des commençans? Mais il importe qu'on choisisse le principe le plus naturel, et qu'on le suive scrupuleusement dans tous les détails. Je crois que l'auteur du livre a bien réussi sous ce rapport.

Il y a encore une autre difficulté à lever, pour que le commençant puisse en peu de temps saisir cette branche importante du calcul; c'est de lui fournir matière à s'exercer sur la théorie. C'est par l'application de la méthode qu'on parvient à comprendre le sens d'une théorie dans toute son étendue, et le succès, dans ces sortes d'exercices, fait naître l'intérêt que le commençant prend, dans la suite, à cette étude.

Le bon choix et le grand nombre d'exemples et de problèmes, rangés méthodiquement et adaptés à la théorie, prouvent que l'expérience a toujours guidé l'auteur dans ce choix. La méthode, claire et nette, également éloignée de diffusion et d'aridité, suivie partout dans ce livre, aussi bien

que les solutions intéressantes et quelquefois neuves, ne contribueront pas peu à intéresser le lecteur à cette importante science.

C'est donc, sous ce double rapport, que l'original a mérité d'être adopté dans l'enseignement public, et qu'il a paru utile à ceux qui, sans le secours d'un maître, veulent étudier seuls cette branche des Mathématiques et faire en peu de temps de véritables progrès.

Tout cela m'a engagé à traduire ce livre en français, puisque non-seulement cette langue appartient à une nation qui se distingue par une certaine prédilection pour les Mathématiques, mais aussi qu'elle est ordinairement familière à ceux qui s'occupent de cette science. J'ai ajouté quelques notes et solutions pour faciliter encore davantage l'étude du livre.

Je crois devoir remarquer enfin que ce livre sert de base à un autre ouvrage que le même auteur vient de publier, il y a un an, sous le titre : *Lehrbegriff der höhern Körperlehre. Herausgegeben von Professor Samuel Ferdinand Lubbe. Berlin bey J. A. Riemann.* 1828. 8°, et qui renferme, outre la plus claire exposition de la théorie de cette science, une nouvelle méthode d'intégration des équations différentielles partielles, qui

appartenant exclusivement à l'auteur, méritera sans doute les suffrages des géomètres.

Le seul but que je me sois proposé, en publiant cet ouvrage, ayant été de contribuer, selon mes faibles forces, aux progrès des connaissances mathématiques, j'ose compter sur l'indulgence du lecteur.

Berlin, au mois de décembre 1829.

MAURICE KARTSCHER.

TABLE DES MATIÈRES.

Des fonctions en général et de la différentielle. Page 1

N° 1. Quantités variables. — 2. Classification des fonctions. — 3. Équations explicites et implicites.—4. Variables indépendantes et dépendantes.—5. Changemens des variables indépendantes et dépendantes. — 6. Du coefficient différentiel et de la différentielle. — 7. Le coefficient différentiel est la limite du rapport des accroissemens de la variable indépendante à ceux de la variable dépendante. — 8. Différentielle d'une fonction qui est composée de plusieurs parties. — 9. Le coefficient différentiel peut être traité comme une fraction. — 10. Différentiation d'une fonction médiate. — 11. Différentiation d'un produit. — 12. Différentiation de l'expression x^n. — 13. Différentiation de l'expression $\frac{u}{v}$. — 14. Exemples pour la différentiation des fonctions algébriques.

Des coefficiens différentiels et des différentielles des ordres supérieurs, n° 15 20

Du développement d'une fonction en série, ordonnée suivant les puissances entières d'une variable 23

N° 16. Développement de la fonction suivant les puissances entières de la variable indépendante. — 17. Développement du changement de la fonction suivant les puissances du changement de l'indépendante.

De la différentiation des fonctions transcendantes ... 28

N° 18. Différentiation de l'expression a^x. — 19. Différentiation de $\log y$. — 20. Série pour $\log(1+x)$. — 21. Méthode pour trouver le logarithme d'un nombre. — 22. Exemples pour la différentiation des fonctions exponentielles et logarithmiques.

De la différentielle de l'arc 37

N° 23. Considération de la série $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \psi\Delta x$. — 24. Démonstration que $\frac{d\varphi}{dx} = \alpha$, si $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} > \alpha + \psi\Delta x$ et si en même temps...

Du volume des corps de révolution..... Page 215
N° 82. Cubature de quelques autres solides.
De la quadrature des surfaces courbes.. 221
N° 83. Formule pour la quadrature des surfaces courbes. Exemples. — 84. Quadrature de l'aire des corps de révolution.
Différentiation des équations implicites à deux variables. . . . , ... 231
N° 85. Différentiation des équations de ce genre. — 86. Équations différentielles immédiates et médiates.
Intégration des équations différentielles à deux variables, du premier ordre, n° 87.. 236
Intégration des équations différentielles médiates à deux variables, du premier ordre, n° 88. 240
Des équations différentielles à deux variables, du premier ordre, où les différentielles passent le premier degré, n° 89.. 247
Des solutions particulières et des courbes enveloppantes. 255
N° 90. Des solutions particulières. — 91. Courbes développantes et développées. — 92. Caustique. — 93. Roulette. — 94. Méthode pour trouver la développante par la développée. — 95. Problèmes pour l'intégration des équations différentielles implicites à deux variables, du premier ordre.
Des équations différentielles à deux variables, du second ordre. 288
N° 96. Intégration des équations différentielles de ce genre. — 97. Problèmes.
Intégration des équations différentielles du troisième ordre, n° 98. 301
Intégration des équations différentielles, par approximation, n° 99. 303
Intégration des équations différentielles partielles. . . 307
N° 100. Intégration des équations différentielles partielles du premier ordre. — 101. Intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, où les coefficiens différentiels partiels passent le premier degré.
APPENDICE. *Notes et Solutions*. 325

FIN DE LA TABLE.

TRAITÉ
DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL.

Des fonctions en général, et des différentielles.

1. Les quantités qu'on suppose comme pouvant prendre successivement toutes les valeurs déterminées s'appellent *quantités variables;* on leur oppose les *quantités constantes,* qu'on regarde comme conservant toujours la même valeur. Celles-là se désignent ordinairement par les dernières, celles-ci par les premières lettres de l'alphabet.

Un ensemble de quantités variables et constantes s'appelle *fonction.* Ainsi, par exemple, l'expression ax^2, où l'on regarde a comme constante et x comme variable, est une fonction. Lorsqu'on y donne à x successivement toutes les valeurs déterminées, l'expression ax^2 même obtiendra pour chacune d'elles une valeur différente; par exemple, faisant $x = a$, $= 2a$, $= 3a$, etc., la valeur de l'expression ou de la fonction ax^2 deviendra a^3, $4a^3$, $9a^3$, etc.

2. On distingue d'abord les fonctions, selon le nombre des quantités variables qu'elles renferment, en fonctions de 1, 2, 3, et plusieurs quantités variables. Ainsi, par exemple, l'expression ax^2, considérée au numéro précédent, est fonction d'une seule quantité variable; mais l'ex-

pression $ay + bx + c$ est fonction de deux variables, quand on pose x variable ainsi que y. De plus, l'expression $az + by + cx + d$, où l'on regarde z, y, x, comme variables, est fonction de trois variables; et ainsi de suite pour plusieurs variables.

En second lieu, on distingue les fonctions selon les opérations prescrites qu'on doit effectuer sur la variable. Lorsque les termes contenant la variable sont joints ensemble par addition, soustraction, multiplication ou division, ou que la variable se trouve en puissance dont l'exposant est un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, mais constant, la fonction s'appelle *algébrique* (rationnelle ou irrationnelle, selon que l'exposant est un nombre entier ou fractionnaire). Mais si la fonction contient la variable à l'exposant, ou sous le signe du logarithme, ou comme arc, ou enfin comme ligne trigonométrique, elle s'appelle *transcendante*.

De plus, on distingue des fonctions *entières* et *fractionnaires* : celles-là contiennent la variable seulement au numérateur; celles-ci la contiennent au dénominateur seul, ou tant au numérateur qu'au dénominateur.

Exemples. $ax + b^{\frac{1}{3}}x^{3}$ est une fonction algébrique rationnelle entière;

$(a^{3} - x^{3})^{\frac{1}{3}}$, une fonction algébrique irrationnelle entière;

$a.\text{arc}\,(\sin = x)$, une fonction transcendante entière;

$\frac{\log a}{x}$, une fonction algébrique fractionnaire rationnelle;

$\frac{a}{b^{x}}$, une fonctiou transcendante fractionnaire.

Ces exemples sont tous fonctions d'une seule quantité variable.

$\frac{a^{2}x}{y}$ est une fonction algébrique de deux variables, en-

tière par rapport à x, et fractionnaire par rapport à y.

$\frac{ax}{\log y} - \frac{b}{z}$ est une fonction de trois variables, algébrique et entière par rapport à x, transcendante et fractionnaire par rapport à y, et algébrique et fractionnaire par rapport à z.

3. Les équations se distinguent, comme les fonctions, en équations à une, deux, trois ou plusieurs variables, selon qu'elles contiennent une, deux, trois ou plusieurs variables. Ainsi, par exemple, $ax^2 = c$ est une équation à une seule variable;

$\frac{ax}{y} + y = \frac{x^2}{c}$ est une équation à deux variables.

De plus, on distingue des *équations explicites* et *implicites*. Les équations explicites sont celles où la variable se trouve seule dans l'un des deux membres de l'équation; les équations implicites sont celles où les variables se trouvent mêlées ensemble.

On peut changer toute équation implicite en équation explicite, en séparant l'une des variables que l'équation renferme. On changera, par exemple, l'équation implicite $y^2 + x^2 = a^2$, par la séparation de y, en l'équation explicite $y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Il est aisé de voir que cette séparation de l'une des variables, ou la transformation proposée d'une équation implicite en équation explicite, est assujettie aux mêmes difficultés qu'on éprouve dans la solution des équations à une quantité inconnue.

Il est encore évident que la fonction d'une variable sera transformée en une équation explicite à deux variables, en égalant la fonction même à l'une des variables. Désignant, par exemple, par y la fonction d'une seule variable ax^2, on a l'équation explicite à deux variables $y = ax^2$.

C'est de la même manière qu'une fonction de deux va-

riables sera changée en équation explicite à trois variables, et ainsi de suite pour plusieurs variables. On tirera, par exemple, de l'expression $x^2 + y^2 - a^2$, l'équation explicite $z = x^2 + y^2 - a^2$.

4. En déterminant x arbitrairement, dans une équation explicite ou implicite à deux variables x et y, l'autre variable y en sera entièrement déterminée par l'équation, de sorte que les valeurs déterminées des variables x et y ne peuvent pas être prises indépendamment l'une de l'autre, ou que x ayant pris une certaine valeur, y ne peut pas prendre une valeur quelconque arbitraire. Égalant, par exemple, dans l'équation $ay + bx = xy$, x à c, on obtiendra $y = \frac{bc}{c-a}$.

Dans cet exemple, après avoir fait la détermination arbitraire de x, on a trouvé la valeur de y. Mais on peut aussi commencer par donner à y une valeur arbitrairement déterminée, et ensuite trouver x dans l'équation.

On appelle, dans une équation à deux variables, celle qu'on peut déterminer à volonté, la *variable indépendante* ou primitive, et l'autre, dont on trouve ensuite la valeur dans l'équation donnée, la *variable dépendante*.

Nous représenterons dorénavant la variable indépendante par la lettre x, et la variable dépendante par la lettre y, à moins qu'on ne fasse une restriction particulière.

On appelle, dans une équation explicite à deux variables, la variable dépendante y la *fonction* qu'on désigne quelquefois par $f(x)$ ou $\varphi(x)$.

Ce n'est que dans la suite que nous exposerons la dépendance des changemens dans les équations à trois et plusieurs variables. Il s'agit d'abord des équations à deux variables, et particulièrement des équations explicites à deux variables.

La forme ou l'expression générale des équations expli-

cites à deux variables est, d'après ce qui précède, $y=f(x)$, où $f(x)$, hors les quantités constantes, ne contient que la seule variable et indépendante x.

5. Mettons maintenant dans une équation explicite à deux variables $x+\Delta x$ au lieu de l'indépendante x; par là la fonction $y=f(x)$ est changée en

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

D'après cette notation, Δx indiquera le changement ou la différence de l'indépendante x, Δy le changement ou la différence de la dépendante ou de la fonction y, qui en résulte, donc $x+\Delta x$ indiquera la variable indépendante changée, comme $y+\Delta y$ la variable dépendante changée. Désignons par $f(x)$ la fonction proposée ou primitive, par $y=f(x)$, l'équation proposée ou primitive.

On se propose maintenant de développer $f(x+\Delta x)$ en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de Δx. Qu'on pose pour cela

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)=\mathrm{A}+\mathrm{B}.\Delta x+\mathrm{C}.\Delta x^2+\ldots.$$

A, B, C, etc., contiennent seulement x, et non pas Δx; il faut donc les déterminer.

Le coefficient A peut être immédiatement déterminé; car lorsqu'on fait dans la série ci-dessus $\Delta x=0$, Δy sera de même égal à zéro, et la série se réduit à son premier terme: donc on aura $y=\mathrm{A}$, c'est-à-dire que A est la fonction primitive. Retranchant maintenant $y=\mathrm{A}$, on aura

$$\Delta y=\mathrm{B}.\Delta x+\mathrm{C}.\Delta x^2+\ldots,$$

ou le changement de la fonction exprimé par une série ordonnée suivant les puissances entières de Δx.

On écrit aussi cette série comme il suit:

$$\Delta y = y'\Delta x + y''\Delta x^2 + \ldots\ldots,$$

ou

$$\Delta y = f'(x).\Delta x + f''(x).\Delta x^2 + \ldots\ldots,$$

ou pour abréger,

$$\Delta y = y'\Delta x + \psi\Delta x^2,$$

où

$$\psi = y'' + y'''\Delta x + \ldots\ldots$$

Exemple. Soit la fonction primitive $y = ax^2$; on a donc

$$y + \Delta y = a.(x + \Delta x)^2 = ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2;$$

en retranchant $y = ax^2$, il reste

$$\Delta y = 2ax\Delta x + a\Delta x^2.$$

Les coefficiens A, B, C, D..., sont donc ici déterminés par les valeurs ax^2, $2ax$, a, o.....

6. En divisant par Δx les deux membres de la série

$$\Delta y = y'\Delta x + y''\Delta x^2 + \ldots\ldots,$$

on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + y''\Delta x + \ldots\ldots,$$

où $y' + y''\Delta x + \ldots.$ sera l'exposant du rapport des deux changemens Δx et Δy, ou du *rapport des différences*. Le premier terme du rapport des différences est donc y'. La notation la plus usitée pour ce terme, outre celle de $f'(x)$, dont nous avons fait mention au numéro précédent, est $\frac{dy}{dx}$. La première notation du premier terme de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ indique qu'il est une fonction de x, et en particulier une fonction dérivée de $y = f(x)$ (n° 5); la dernière fait reconnaître son origine de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. La dénomination ordinaire de $\frac{dy}{dx}$ est *coefficient différentiel.*

L'objet du calcul différentiel est de le trouver.

On désigne ordinairement l'expression $y' = \frac{dy}{dx}$ par $dy = y'dx$, ou $dy = \frac{dy}{dx}.dx$, et l'on appelle dy la *différentielle* de y, dx celle de x; et l'on dit que la différentielle de y est égale à la quantité y' ou $\frac{dy}{dx}$, multipliée par la différentielle de x. Mais il ne faut point regarder dy et dx en elles-mêmes comme de véritables quantités, ni $y'dx$ et $\frac{dy}{dx}.dx$ comme de véritables produits, ni $\frac{dy}{dx}$ comme un véritable quotient.

Lorsqu'on cherchera dans la suite la différentielle d'une fonction, on n'aura qu'à chercher le coefficient différentiel de cette fonction, et à l'écrire ensuite sous la forme de la différentielle.

Le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ se désigne aussi par p, et par conséquent la différentielle d'une fonction y par

$$dy = p.dx.$$

Nous avons trouvé dans l'exemple ci-dessus

$$y = ax^2, \quad \Delta y = 2ax\Delta x + a\Delta x^2,$$

d'où résulte le rapport des différences

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x;$$

donc on aura ici le coefficient différentiel

$$y' = \frac{dy}{dx} = p = 2ax,$$

et la différentielle est

$$dy = 2ax.dx.$$

Nous venons d'exposer que, si y est fonction de x, on aura

$$\Delta y = y'\Delta x + y''\Delta x^2 + \ldots,$$

et

$$dy = y'dx, \quad \text{ou} \quad dy = \frac{dy}{dx}.dx.$$

En conséquence de cela, on aura dans l'équation primitive $x = f(y)$, en y regardant réciproquement x comme fonction de y,

$$\Delta x = \frac{dx}{dy}.\Delta y + x''.\Delta y^2 + \ldots,$$

et

$$dx = \frac{dx}{dy}.dy.$$

De plus, si par exemple z est fonction de u, on aura

$$\Delta z = \frac{dz}{du}.\Delta u + z''.\Delta u^2 + \ldots,$$

et

$$dz = \frac{dz}{du}.du.$$

Réciproquement, étant donnée l'expression $\frac{du}{dy}.dy$, on la pourra remplacer par du.

Enfin on pourra dériver d'une différentielle donnée la différence; étant

$$dy = \frac{dy}{dx}.dx,$$

on aura

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}.\Delta x + y''.\Delta x^2 + \ldots.$$

7. En considérant l'expression

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + y''.\Delta x + \ldots,$$

il sera d'abord évident que la valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (savoir, la série $\frac{dy}{dx} + y''\Delta x + \ldots$), en y supposant $\Delta x = 0$, se réduira à $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire au coefficient différentiel. Cette valeur sera d'ailleurs peu différente de $\frac{dy}{dx}$, si Δx est supposée très petite, et elle sera d'autant moins différente de $\frac{dy}{dx}$ que Δx sera plus petite. On pourra donc dire que $\frac{dy}{dx}$ est la limite de la valeur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, en sorte que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ approche d'autant plus de cette limite que Δx est plus petite, mais qu'elle ne l'atteint qu'au cas que Δx soit égale à zéro. $\frac{dy}{dx}$ est donc la limite du rapport des différences de y et x; ce qu'on appelle aussi le *dernier rapport des différences* de x et y elles-mêmes. D'après cela, on pourra aussi juger (*voy.* n° 6) comment les notations $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ font reconnaître la liaison intime qu'il y a entre les valeurs qu'elles expriment.

8. On verra aisément, d'après ce qui a été dit, comment il faut procéder à l'égard des fonctions qui contiennent plusieurs termes. Soit

$$y = u + v + z + \ldots,$$

où u, v, z,... sont des fonctions de x.

En mettant $x + \Delta x$ au lieu de x, on aura, d'après les n°s 5 et 6, au lieu de u,

$$u + \Delta u = u + \frac{du}{dx}\Delta x + u''\Delta x^2 + \ldots,$$

au lieu de v,

$$v + \Delta v = v + \frac{dv}{dx}\Delta x + v''\Delta x^2 + \ldots;$$

au lieu de z,

$$z + \Delta z = z + \frac{dz}{dx}\Delta x + z''\Delta x^2 + \ldots, \text{ etc.}$$

On aura donc

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v + z + \Delta z + \ldots = u + \frac{du}{dx}\Delta x + u''\Delta x^2 + \ldots$$
$$+ v + \frac{dv}{dx}\Delta x + v''\Delta x^2 + \ldots + z + \frac{dz}{dx}\Delta x + z''\Delta x^2 + \ldots,$$

En retranchant la fonction primitive, on aura

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta z + \ldots = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx} + \ldots\right)\Delta x$$
$$+ (u'' + v'' + z'' + \ldots)\Delta x^2 + \ldots;$$

de là on tire, d'après le n° 6,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx} + \ldots,$$

c'est-à-dire qu'une fonction composée de plusieurs fonctions de la même variable indépendante, jointes ensemble par voie d'addition ou de soustraction, a pour différence la somme des différences de ces fonctions, et pour son coefficient différentiel la somme des coefficiens différentiels de chacune de ces fonctions.

Exemple. Soit $y = ax^2 + bx$; on a

$$u = ax^2,\ v = bx;$$

d'ou
$$\frac{du}{dx} = 2ax,\ \frac{dv}{dx} = b;$$

on a donc

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b.$$

De l'expression

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx} + \ldots$$

on conclura aussi, d'après le n° 6,

$$dy = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dx} + \ldots\right)dx = \frac{du}{dx}.dx + \frac{dv}{dx}.dx + \frac{dz}{dx}.dx + \ldots.$$

On a aussi (n° 6)

$$dy = du + dv + dz + \ldots,$$

proposition qui s'exprime ainsi : la différentielle d'une fonction qui est composée de plusieurs fonctions de la même variable indépendante est égale à la somme des différentielles de chacune de ces fonctions.

On aura, par exemple, dans la fonction $y = ax^2 + bx$,

$$dy = 2axdx + bdx.$$

Lorsque l'un des termes dont y est composé sera constant, il est clair que cette portion n'influe pas dans la différentielle de la fonction. D'après cela, les fonctions

$$y = ax^2 + bx \quad \text{et} \quad y = ax^2 + bx + c.$$

ont la même différentielle.

9. Nous avons considéré au précédent, dans l'équation $y = f(x)$, x comme l'indépendante. Soit y maintenant l'indépendante. D'après la première supposition, on a (n° 6)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + y''\Delta x + \ldots,$$

d'où

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \left(\frac{dy}{dx} + y''\Delta x + \ldots\right).$$

En mettant au second membre de cette équation, y étant maintenant l'indépendante, d'après le n° 6,

$$\Delta x = \frac{dx}{dy}\Delta y + x''\Delta y^2 + \ldots,$$

on obtiendra

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \left[\frac{dy}{dx} + y''\left(\frac{dx}{dy}\Delta y + \ldots\right) + \ldots\right];$$

qu'on mette alors

$$1 : \left[\frac{dy}{dx} + y''\left(\frac{dx}{dy}\Delta y + \ldots\right) + \ldots\right] = \alpha + \beta\Delta y + \ldots.$$

En déterminant α par la méthode des coefficiens indéterminés, on obtiendra

$$\alpha = 1 : \frac{dy}{dx}.$$

Il s'ensuit (n° 6) que

$$\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}.$$

Exemple. Dans l'équation $y = ax^2$, on trouve le coefficient différentiel

$$\frac{dy}{dx} = 2ax \text{ (n° 6)};$$

on aura donc aussi, comme nous venons de prouver,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2ax}\left[x \text{ étant} = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2.(ay)^{\frac{1}{2}}},$$

expression du coefficient différentiel de la fonction $x = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, où y est considéré comme l'indépendante.

On voit par là qu'on peut opérer sur l'expression

$\frac{dy}{dx}$ précisément comme sur une fraction dont dy est le numérateur et dx le dénominateur. Néanmoins, l'assertion faite dans le n° 6, qu'elle n'est pas une véritable fraction, restera en valeur.

10. Soit y exprimé par z, et z par x, en sorte que y soit une fonction médiate de l'indépendante x, comme dans l'équation $y = z^2$, où l'on suppose $z = ax$.

On a, d'après cette supposition,

$$\Delta y = \frac{dy}{dz}\Delta z + y''\Delta z^2 + \ldots,$$

et

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + z''\Delta x^2 + \ldots;$$

en substituant, il viendra

$$\Delta y = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dy}{dz}\cdot z''\Delta x^2 + \ldots;$$

de là

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}, \quad \text{et} \quad dy = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot dx;$$

c'est-à-dire que, pour obtenir le coefficient différentiel d'une fonction qui est médiate de x et immédiate de z, il faut multiplier les deux coefficiens différentiels de la fonction médiate (y) et de l'immédiate (z).

On remarquera d'ailleurs qu'on obtient le même résultat en substituant dans les expressions

$$dy = \frac{dy}{dz}\cdot dz, \quad dz = \frac{dz}{dx}\cdot dx,$$

la valeur de dz, tirée de la dernière de ces expressions, dans la première; il viendra, comme ci-dessus,

$$dy = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot dx.$$

Exemple. Soit à différencier $y = z^2$, où $z = ax$. On a (n° 6) $\frac{dy}{dz} = 2z$ et $\frac{dz}{dx} = a$;

donc $$\frac{dy}{dx} = 2z.a = 2a^2x,$$

résultat qu'on aurait immédiatement obtenu en différenciant l'équation $y = a^2x^2$.

11. Soit $y = u.v$, où u, v sont des fonctions de x; en substituant $x + \Delta x$ au lieu de x, on obtient

$$y + \Delta y = (u + \Delta u).(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u.\Delta v.$$

En retranchant l'équation primitive, il vient

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u.\Delta v.$$

Or on a

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + u''\Delta x^2 + \ldots,$$

et

$$\Delta v = \frac{dv}{dx}\Delta x + v''\Delta x^2 + \ldots \quad (\text{n° } 6).$$

Substituant, on a

$$\Delta y = v.\frac{du}{dx}\Delta x + u.\frac{dv}{dx}\Delta x + v.u''\Delta x^2 + u.v''\Delta x^2 + \ldots$$
$$+ \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \ldots\right).\left(\frac{dv}{dx}\Delta x + v''\Delta x^2 + \ldots\right),$$

d'où

$$dy = v.\frac{du}{dx}.dx + u.\frac{dv}{dx}.dx.$$

Étant d'ailleurs (n° 6) $\frac{du}{dx}.dx = du$, et $\frac{dv}{dx}.dx = dv$, on a enfin

$$dy = vdu + udv;$$

c'est-à-dire que pour avoir la différentielle du produit de deux fonctions de x, il faut multiplier chacune par la différentielle de l'autre, et ajouter ensemble les deux résultats.

Si l'on a $y = a.u$, où a est constant et u une fonction de x, on a, d'après la proposition prouvée ci-dessus [puisque $da = 0$, (n° 8)], $dy = a.du$.

Soit maintenant $y = u.v.z$; en supposant $u.v = n$, on a

$$dy = ndz + zdn, \quad dn = udv + vdu;$$

substituant les valeurs de n et de dn à la valeur de dy, on aura (n° 10)

$$dy = uzdv + vzdu + uvdz.$$

Il en résulte le moyen de trouver la différentielle d'un produit des fonctions de la même variable indépendante quel que soit leur nombre; savoir : il faut multiplier la différentielle de chacune de ces fonctions par le produit de toutes les autres fonctions et ajouter ensuite ensemble ces résultats.

12. Nous voilà, d'après cela, en état de différencier l'équation $y = x^n$.

On a $x^n = x.x.x...$, où les fonctions de x, notées en général au numéro précédent par u, v, z..., sont par conséquent toutes égales entre elles et en même temps égales à x. Chacun des termes qui forment la différentielle sera donc égal à $x^{n-1}dx$. Or ces termes sont au nombre de n; donc on aura

$$dy = d.x^n = nx^{n-1}dx.$$

D'après le n° 9, on en tirera aisément la différentielle de $y = x^n$, lorsque y est la variable indépendante, ou de $x = y^{\frac{1}{n}}$. Savoir, on a (n° 9)

$$dx = \frac{1}{nx^{n-1}}\,dy \text{ [parce que } x = y^{\frac{1}{n}}] = \frac{dy}{ny^{\frac{1}{n}(n-1)}} = \frac{dy.y^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

En changeant les lettres x et y, on aura donc

$$dy = d.x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}dx.$$

De là on trouve aisément, à l'aide du n° 10, la différentielle de $y = x^{\frac{m}{n}}$ en mettant $x^{\frac{1}{n}} = z$. On aura alors

$$y = z^m,\ z = x^{\frac{1}{n}};$$

donc $\quad dy = mz^{m-1}dz,\quad dz = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx;$

par conséquent (n° 10)

$$d.y = d.x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}dx.$$

Soit ainsi dans la fonction $y = x^m$, m un nombre entier ou fractionnaire, mais positif, on aura toutes les fois

$$dy = d.x^m = mx^{m-1}dx.$$

Voilà donc la règle: pour trouver la différentielle de x^m, où m est un nombre positif, entier ou fractionnaire, il faut multiplier dx par l'exposant de la variable indépendante et par la puissance proposée, dont l'exposant est diminué d'une unité.

13. Soit $y = \frac{u}{v}$, où u et v sont des fonctions de x; il vient (n° 6)

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \ldots, \quad \Delta v = \frac{dv}{dx}\Delta x + \ldots.$$

On tire de la fonction proposée

$$v.y = u.$$

De là on a, en substituant $x + \Delta x$ au lieu de x,

$$(v + \Delta v)(y + \Delta y) = u + \Delta u$$

ou

$$vy + v.\Delta y + y.\Delta v + \Delta v.\Delta y = u + \Delta u,$$

en retranchant $vy = u$, il viendra

$$v.\Delta y + y.\Delta v + \Delta v.\Delta y = \Delta u,$$

de là

$$\Delta y = \frac{\Delta u - y.\Delta v}{v + \Delta v} = \frac{\frac{du}{dx}\Delta x + u''\Delta x^2 + \ldots - y\left[\frac{dv}{dx}\Delta x + \ldots\right]}{v + \frac{dv}{dx}\Delta x + v''\Delta x^2 + \ldots}.$$

En égalant la dernière fraction à la série suivante

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \ldots,$$

où α, β, ... sont des coefficiens indéterminés, on obtiendra

$$\frac{du}{dx} - y.\frac{dv}{dx} = v.\alpha;$$

ou

$$\alpha = \frac{\frac{du}{dx} - y.\frac{dv}{dx}}{v} = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2};$$

donc (n° 6)

$$dy = \frac{v.\frac{du}{dx}.dx - u.\frac{dv}{dx}.dx}{v^2}.$$

Or, on a (n° 6)

$$\frac{du}{dx}.dx = du, \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dx}.dx = dv;$$

on aura donc enfin

$$dy = d.\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Il en résulte que la différentielle d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont fonctions de la même variable est égale à la différentielle du numérateur multipliée par le dénominateur, moins la différentielle du dénominateur multipliée par le numérateur, et le tout divisé par le quarré du dénominateur.

Soit donnée l'équation

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad \text{où} \quad u = 1, \quad v = x^m,$$

donc $du = 0$ (n° 8), $dv = mx^{m-1}dx$ (n° 12);

donc on a

$$d.\frac{1}{x^m} = \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx.$$

Soit de plus

$$y = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}, \text{ où } u = 1, \ v = x^{\frac{m}{n}}, dv = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx \text{ (n° 12)};$$

donc

$$d.x^{-\frac{m}{n}} = \frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx,$$

d'où l'on conclura que la différentielle de x^m, où m est un nombre négatif, entier ou fractionnaire, sera

$$mx^{m-1}dx.$$

En comparant avec cela ce qui a été dit au numéro précédent sur la différentielle de x^m (où m était regardé seulement comme un nombre positif), on aura la proposition que voici : $d.x^m$ est égal à $mx^{m-1}dx$, soit que m désigne un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, c'est-à-dire que la différentielle de x^m, soit m un nombre positif, négatif, entier ou fractionnaire, est égale à dx multiplié par l'exposant de la variable et par la puissance proposée dont l'exposant est diminué d'une unité.

14. Les règles énoncées dans le précédent suffiront pour la différenciation de toutes les fonctions algébriques. Voici encore quelques exemples de l'application de ces règles.

Exemple 1. Soit $y=(a+bx^m)^n$.

Mettant $a+bx^m=z$, on aura

$$y=z^n,\quad dy=nz^{n-1}dz \quad (\text{n}^\circ\ 12);$$

$$dz=mbx^{m-1}dx \quad (\text{n}^{os}\ 8,\ 11,\ 12);$$

donc (n° 10)

$$dy=nmb\,(a+bx^m)^{n-1}.x^{m-1}dx.$$

Exemple 2. $y=\dfrac{ax}{x+(a+x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Comparant cette fonction avec u et v au n° 13, on aura

$$u=ax,\quad du=a.dx \quad (\text{n}^\circ\ 11),$$

$v=x+(a+x^2)^{\frac{1}{2}}$; qu'on pose $a+x^2=z$, il en résulte

$$d.(a+x^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz \quad (\text{n}^\circ\ 12),$$

et $$dz=2xdx \quad (\text{n}^{os}\ 8,\ 12);$$

donc

$$d.(a+x^2)^{\frac{1}{2}} = x\,(a+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \text{ (n° 10)};$$

par conséquent

$$dv = dx + \frac{x\,dx}{(a+x^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ (n° 8)},$$

d'où

$$dy = d.\frac{ax}{x+(a+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \text{(n° 31)}\ \frac{a\,dx\left[x+(a+x^2)^{\frac{1}{2}}\right] - ax\,dx\left[1+\frac{x}{(a+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]}{\left[x+(a+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2},$$

ou après la réduction

$$= \frac{a^2\,dx}{(a+x^2)^{\frac{1}{2}}.\left[x+(a+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2}.$$

Le lecteur fera bien de s'exercer en différenciant les fonctions suivantes, alléguant avec soin les règles énoncées, comme on l'a fait aux deux exemples précédens.

Exemple 3. $y = \frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} + \left(a + \frac{b}{x}\right)^m$.

Exemple 4. $y = \frac{1+x}{(1-x)^{\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}}$.

Des coefficiens différentiels et des différentielles des ordres supérieurs.

15. Le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx} = p$ étant une fonction de x (n° 6), on en peut prendre comme d'une fonction primitive, la différence, le rapport des différences et

le coefficient différentiel. Or, la notation du coefficient différentiel est $\frac{dy}{dx}$, si y est la fonction primitive; il faudrait donc, si l'on regarde $\frac{dy}{dx}$ comme fonction primitive, d'après l'analogie, désigner le coefficient différentiel du coefficient différentiel par $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$; mais on le désigne ordinairement par $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou par $f''(x)$, le plus souvent par la lettre q. On l'appelle avec raison le *second coefficient différentiel* ou le *coefficient différentiel du second ordre* de la fonction y.

Aussi l'écrit-on, tout comme il a été exposé pour le premier coefficient différentiel (n° 6), sous cette forme

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}.dx^2, \quad \text{ou} \quad d^2y = q.dx^2,$$

en nommant dans cette expression d^2y la seconde différentielle de y et dx^2 le quarré de la différentielle de x.

En regardant $\frac{d^2y}{dx^2}$ comme fonction primitive, on obtient le troisième coefficient différentiel de y, savoir, $\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}$. Au lieu de cette notation, on se sert plus fréquemment de celle de $\frac{d^3y}{dx^3}$, de r ou de $f'''(x)$. La différentielle troisième de la fonction y sera par conséquent

$$d^3y = \frac{d^3y}{dx^3}.dx^3, \quad \text{ou} \quad d^3y = r.dx^3.$$

On en conclura aisément les notations des coefficiens différentiels et des différentielles ultérieures.

On appelle les coefficiens différentiels et les différentielles qui surpassent le premier ordre, *coefficiens différentiels des ordres supérieurs*, ou *coefficiens différentiels supérieurs*, et *différentielles supérieures* de la fonction primitive y.

On voit aisément que la seconde différentielle

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}.dx^2 = q.dx^2$$

s'obtiendrait, si l'on différenciait la différentielle première

$$dy = \frac{dy}{dx}.dx = pdx,$$

de telle sorte qu'on regardât dy et dx comme de véritables quantités, et pdx comme un produit, dy et p comme variables, mais dx comme constant. En effet, on obtiendrait alors de $dy = \frac{dy}{dx}.dx$,

$$d.dy = d.\frac{dy}{dx}dx,$$

ou

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx}dx \text{ (n° 11)},$$

en multipliant par dx et divisant

$$= \frac{d^2y}{dx^2}.dx^2, \quad \text{ou} \quad d^2y = q.dx^2.$$

On obtiendrait de la même manière de la différentielle seconde $d^2y = q.dx^2$ la différentielle troisième, en différenciant de la sorte, qu'on regardât d^2y et q comme variables, et dx^2 comme constant; et ainsi de suite pour les différentielles successives.

Après avoir exposé aux numéros précédens la méthode

de différencier toute fonction algébrique, nous sommes en état d'en trouver aussi les différentielles supérieures, chacun des coefficiens différentiels successifs d'une fonction algébrique étant de même une fonction algébrique.

Nous développerons, pour servir d'exemple, les différentielles des ordres supérieurs de la fonction $y = ax^m$. On a (n° 12)

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)ax^{m-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)ax^{m-3}, \text{ etc.}$$

De plus,

$$dy = max^{m-1}dx, \quad d^2y = m(m-1)ax^{m-2}dx^2,$$

$$d^3y = m(m-1)(m-2)ax^{m-3}dx^3, \text{ etc.}$$

De la transformation d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances entières de la variable.

16. Nous exprimerons maintenant, à l'aide des différentielles supérieures, une fonction d'une seule variable par une série ordonnée suivant les puissances entières de cette variable.

Soit représenté la fonction par y, et la variable qu'elle renferme par x. Supposant à volonté la série

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots,$$

on se propose de déterminer les coefficiens A, B, C..., c'est-à-dire la série elle-même.

Pour déterminer d'abord A, il faut égaler x à zéro aux

deux membres de l'équation; la valeur où se réduira y, lorsqu'on y met $x = 0$, soit représentée par

$$y_{x=0};$$

donc on aura

$$A = y_{x=0}.$$

On déterminera les autres coefficiens, si l'on fait $x = 0$ dans les coefficiens différentiels successifs de l'équation

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

Ainsi on aura

$$p = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots$$
$$q = 2C + 6Dx + 12Ex^2 + \ldots$$
$$r = 6D + 24Ex + \ldots \text{ etc.}$$

Donc

$$p_{x=0} = B, \quad q_{x=0} = 2C, \quad r_{x=0} = 6D, \text{ etc.};$$

où la notation $x = 0$ jointe aux coefficiens différentiels (laquelle se pourrait prononcer par : si l'on fait x égal à zéro) indique qu'on y doit mettre $x = 0$.

Ainsi on obtiendra

$$B = p_{x=0}, \quad C = q_{x=0}.\frac{1}{1.2}, \quad D = r_{x=0}.\frac{1}{1.2.3}, \text{ etc.}$$

Enfin il en résultera

$$y = y_{x=0} + p_{x=0}.x + q_{x=0}.\frac{x^2}{1.2} + r_{x=0}.\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Exemple 1. La fonction $y = \frac{a}{b+x}$ doit être transformée en série ordonnée suivant les puissances entières de x. On a ici, d'après les règles précédentes de la différenciation,

$$p = \frac{-a}{(b+x)^2}, \quad q = \frac{2a}{(b+x)^3}, \quad r = \frac{-6a}{(b+x)^4}, \ldots.$$

Il vient de plus

$$y_{x=0}=\frac{a}{b},\ p_{x=0}=\frac{-a}{b^2},\ q_{x=0}=\frac{2a}{b^3},\ r_{x=0}=\frac{-6a}{b^4},\ \text{etc.}$$

Ces valeurs trouvées, substituées dans la série développée ci-dessus,

$$y=y_{x=0}+p_{x=0}.x+q_{x=0}.\frac{x^2}{1.2}+\ldots,$$

on obtiendra

$$\frac{a}{b+x}=\frac{a}{b}-\frac{a}{b^2}.x+\frac{a}{b^3}.x^2-\frac{a}{b^4}.x^3+\ldots.$$

Au reste, on obtiendra ce même résultat en déterminant dans l'expression $\frac{a}{b+x}=A+Bx+Cx^2+\ldots$, les coefficiens indéterminés suivant la méthode ordinaire; aussi obtiendra-t-on le même résultat en divisant a par $b+x$. Le lecteur pourra lui-même s'en convaincre par le calcul.

Exemple 2. Soit à développer suivant les puissances entières de x la fonction

$$y=(a+x)^m,$$

on a

$$p=m(a+x)^{m-1},\quad q=m(m-1)\ (a+x)^{m-2};$$

$$r=m(m-1)\ (m-2)\ (a+x)^{m-3},\ \ldots\ \text{etc.},$$

$$y_{x=0}=a^m,\ p_{x=0}=ma^{m-1},\ q_{x=0}=m(m-1)a^{m-2},\ \text{etc.}$$

Ces valeurs substituées dans la série générale ci-dessus, on aura

$$y=(a+x)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2+\ldots$$

Il est visible que l'expression de cette série restera en va-

leur, quelque nombre que désigne m, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, parce que les coefficiens différentiels précédemment développés sont les mêmes pour tous les cas (n°s 12, 13). Ainsi voilà la proposition du binome démontrée tout en général et pour l'affection de l'exposant quelconque.

Comme on peut regarder dans une expression de plusieurs quantités chacune d'elles arbitrairement comme variable, à moins qu'il n'y ait rien ailleurs de déterminé, la proposition énoncée dans ce numéro apprend en effet à développer une expression suivant l'une des quantités qu'elle renferme. Elle porte, selon son inventeur, le nom de *proposition de Maclaurin.*

En effet, on peut, dans le premier exemple, développer la fonction $y = \frac{a}{b+x}$ suivant les puissances entières de b en prenant les valeurs de

$$\frac{dy}{db} = \frac{-a}{(b+x)^2}, \quad \frac{d^2y}{db^2} = \frac{2a}{(b+x)^3}, \quad \text{etc.},$$

$$p_{b=0} = \frac{-a}{x^2} \left(\text{où} \quad p = \frac{dy}{db} \right) \text{etc.},$$

et la série posée pour ce cas

$$y = A + Bb + Cb^2 + \ldots$$

devient par là

$$\frac{a}{b+x} = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} b + \frac{a}{x^3} b^2 - \ldots.$$

Si l'on développe dans le second exemple la fonction $y = (a+x)^m$ par rapport à a, on obtient

$$(a+x)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} a + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} a^2 + \ldots.$$

17. Soit donnée une fonction développée suivant les puissances entières de x, donc

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots,$$

où (n° 16) A, B, C... sont égaux à

$$y_{x=0},\quad p_{x=0},\quad q_{x=0}.\frac{1}{1.2},\quad \ldots.$$

Si l'on met au lieu de x, $x + \Delta x = x + h$, y deviendra $y + \Delta y = y + k$ (en sorte que $\Delta x = h$ désigne ici la différence de l'indépendante, $\Delta y = k$ celle de la dépendante ou de la fonction). Il viendra par cette substitution (A, B, C... ne contenant pas x),

$$\begin{aligned} y + k &= A + B(x+h) + C(x+h)^2 + D(x+h)^3 + \ldots \\ &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + h(B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots) \\ &\quad + h^2(C + 3Dx + \ldots) + h^3(D + \ldots) + \ldots. \end{aligned}$$

Mais la fonction proposée étant $y = A + Bx + Cx^2 + \ldots$, on en tire

$$p = B + 2Cx + \ldots,\ q = 2C + 6Dx + \ldots = 2(C + 3Dx + \ldots), \text{ etc.}$$

(De même comme on a déjà obtenu au numéro précédent.)

Il vient donc enfin

$$y + k = y + \Delta y = y + p.h + q.\frac{h^2}{1.2} + r.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

Retranchant y des deux membres de l'équation, on obtient

$$k = p.h + q.\frac{h^2}{1.2} + r.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

ou

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots.$$

Voilà donc non-seulement la fonction changée, mais

aussi le changement de la fonction exprimé en série suivant les puissances entières de la différence de l'indépendante. Cette série s'appelle, selon son auteur, le *théorème de Taylor.*

Cette série s'exprime aussi par

$$\Delta y = p\Delta x + \psi\Delta x^2,$$

où

$$\psi = \frac{q}{1.2} + r.\frac{\Delta x}{1.2.3} + \ldots \text{ (Voy. n° 5.)}$$

Nous pouvons donc, au moyen de ce numéro et du précédent, développer non-seulement une fonction suivant les puissances entières de l'indépendante, mais aussi le changement de la fonction suivant les puissances du changement de l'indépendante. Les coefficiens de ces deux séries sont des coefficiens différentiels de la fonction proposée, lesquels, dans la première série, sont déterminés par une supposition particulière de l'indépendante (savoir par $x = 0$).

Les deux manières de développement se peuvent effectuer pour chaque fonction de laquelle on peut trouver les coefficiens différentiels successifs. Cela n'étant montré jusqu'ici que pour toutes les fonctions algébriques, ces deux méthodes de développement ne se peuvent appliquer jusqu'ici qu'aux fonctions algébriques.

Pour proposer un exemple, soient données les fonctions à développer

$$y = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{et} \quad y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

De la différentiation des fonctions transcendantes.

18. Soit d'abord $y = a^x$. En substituant $x + \Delta x$ au lieu de x, on aura

$y+\Delta y=a^{x+\Delta x}$, d'où $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x.(a^{\Delta x}-1)$.

Si l'on met $a=1+b$, on obtient

$$a^{\Delta x}-1=(1+b)^{\Delta x}-1=(\text{n}^\circ\,16)\frac{\Delta x}{1}b+\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{1.2}b^2$$
$$+\frac{\Delta x(\Delta x-1)\,(\Delta x-2)}{1.2.3}b^3+\ldots$$

Cette expression ordonnée suivant les puissances de Δx, il vient

$$a^{\Delta x}-1=\Delta x\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\ldots\right)+\frac{\Delta x^2}{1.2}(b^2-b^3+\ldots)+\ldots.$$

En exprimant par k le coefficient de Δx, savoir :

$$b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\ldots=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\ldots,$$

on a

$$\Delta y=a^x.\Delta x.k+a^x\frac{\Delta x^2}{1.2}[(a-1)^2-(a-1)^3+\ldots]+\ldots$$

d'où (n° 6)

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}.a^x=k.a^x.\mathrm{d}x.$$

De là on tirera, d'après n° 15, les différentielles des ordres supérieurs ; en effet on a

$$\mathrm{d}^2y=k^2.a^x\mathrm{d}x^2,\quad \mathrm{d}^3y=k^3.a^x.\mathrm{d}x^3,\quad \text{etc.}$$

Au moyen de ces différentielles on développera (d'après n° 16) la fonction $y=a^x$ en série ordonnée suivant les puissances entières de x. On a ainsi

$$y_{x=0}=a^x{}_{x=0}=a^0=1,\quad p_{x=0}=k,$$
$$q_{x=0}=k^2,\quad r_{x=0}=k^3,\quad \text{etc.}$$

La série de Maclaurin du n° 16 donne par là

$$y = a^x = 1 + \frac{k}{1}.x + \frac{k^2 x^2}{1.2} + \frac{k^3 x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

En faisant maintenant dans cette série $x = 1$, on a

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

En prenant ici $k = 1$, et posant la valeur de a, changée par cette supposition, égale à x, on aura, en développant quelques termes

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = 2,7182818\ldots.$$

On aura donc

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

mettant de nouveau dans cette série $x = k$, il vient

$$e^k = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

On a donc

$$e^k = a,$$

d'où on tire

$$k.\log e = \log a, \quad \text{ou} \quad k = \frac{\log a}{\log e}.$$

Il va sans dire qu'il faut prendre, dans cette expression, les deux logarithmes dans le même système.

19. Nous venons de voir qu'on tire de $y = a^x$

$$dy = k.a^x.dx,$$

et de là, si l'on regarde y comme l'indépendante (d'après n° 9)

$$dx = \frac{dy}{k.a^x} = \frac{dy}{k.y} = (\text{n}^\circ\ 18)\ \frac{dy.\log e}{y.\log a}.$$

Mais on tire en même temps de $y = a^x$,

$$x.\log a = \log y;$$

donc

$$x = \frac{\log y}{\log a} \quad \text{et} \quad dx = \frac{1}{\log a}.d.\log y;$$

par conséquent

$$\frac{1}{\log a}.d.\log y = \frac{\log e.dy}{y.\log a},$$

ou

$$d.\log y = \log e.\frac{dy}{y}.$$

(Il faut prendre ici $\log y$ et $\log e$ dans le même système.)

Si l'on prend le système dont la base est égale à $e = 2,718\ldots$ (n° 18), on a $\log e = 1$, et qu'on désigne le logarithme de y pour ce système par $\log' y$, il vient

$$d.\log' y = \frac{dy}{y}.$$

Ce système dont la base est e, s'appelle le *système des logarithmes naturels, népériens* ou *hyperboliques*.

La proposition trouvée dans ce numéro, sur la différentielle du logarithme d'un nombre, est donc

$$d.\log y = \log e.\frac{dy}{y} \quad \text{et} \quad d.\log' y = \frac{dy}{y},$$

c'est-à-dire que la différentielle du logarithme d'un nombre pris dans un système quelconque est égale à la différentielle du nombre, divisée par le nombre lui-même, et multipliée par le logarithme de $e = 2,718\ldots$ pris dans le système adopté. Pour le système népérien, la différentielle

du logarithme d'un nombre est égale à la différentielle de ce nombre divisée par le nombre.

On a d'ailleurs, lorsqu'on prend les logarithmes dans le système népérien, d'après le n° 18, la série qui suit :

$$a^x = 1 + \log' a . x + \frac{(\log' . a)^2 . x^2}{1.2} + \frac{(\log' . a)^3 . x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

20. Nous développerons maintenant, par le moyen du n° 16, la fonction $y = \log(1 + x)$ en série suivant les puissances entières de x. On a

$$p = \frac{\log e}{1+x} (19), \quad q = \frac{-\log e}{(1+x)^2} (13), \quad r = \frac{2 . \log e}{(1+x)^3}, \text{ etc.},$$

d'où

$$y_{x=0} = \log 1 = 0, p_{x=0} = \log e, q_{x=0} = -\log e, r_{x=0} = 2 . \log e, \text{ etc}$$

Ces valeurs substituées dans la série de Maclaurin au n° 16, on a

$$y = \log(1 + x) = \log e \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

On voit aisément que les termes de cette série deviennent d'autant plus petits qu'ils s'éloignent du commencement, au cas que x soit une fraction véritable (dont le numérateur est plus petit que le dénominateur) ; mais qu'ils deviennent d'autant plus grands au cas que x soit une fraction plus grande que l'unité, parce que la valeur des puissances successives d'une fraction véritable va de plus en plus en diminuant, tandis que celle des puissances successives d'une fraction plus grande que l'unité devient plus grande. Les premiers termes ne suffiront donc pas à trouver le logarithme par approximation, à moins que x ne soit une fraction véritable. On s'exprime là-dessus, comme on sait, en ces termes : « La série ci-dessus n'est convergente que lorsque x est une fraction véritable. »

Un autre inconvénient de cette série consiste dans le changement des signes dont les termes respectifs sont affectés.

Voici un procédé pour trouver une série qui est plus commode pour le calcul. Mettant dans la série ci-dessus $-x$ au lieu de $+x$, on aura

$$\log(1-x) = \log e\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\right).$$

Retranchant cette série de la première, on obtiendra

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \frac{\log(1+x)}{\log(1-x)}$$
$$= 2\log e\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Faisant maintenant

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{n}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{z}{2n+z},$$

on aura

$$\log(n+z) - \log n = 2\log e\left[\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \ldots\right],$$

ou

$$\log(n+z) = \log n + 2\log e\left[\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \ldots\right].$$

Au moyen de cette série, on peut trouver assez exactement par un petit nombre des premiers termes le logarithme d'un nombre, puisque la série est assez convergente et que les termes successifs vont assez vite en diminuant. Si n est plus grande que l'unité, la convergence de la série s'augmente encore davantage. Pour trouver le logarithme du nombre $n+z$, il est nécessaire de connaître auparavant celui du nombre n.

21. Pour le système népérien, dont la base est e, la série ci-dessus se changera, suivant la notation adoptée dans le n° 19, en

$$\log'(n+z) = \log' n + 2\left[\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \ldots\right].$$

Les premiers termes de cette série suffiront à trouver assez exactement le logarithme népérien d'un nombre. Si l'on fait, par exemple, $n = 1$ et $z = 1$, on a pour le logarithme népérien de 2

$$\log' 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \ldots\right);$$

mettant ensuite $n = 2$, substituant, au lieu de $\log' n$, la valeur que nous venons de trouver, et faisant $z = 1$, on obtient le logarithme népérien de 3. Pour trouver le logarithme de 4, on mettra $4 = 2^2$, d'où $\log' 4 = 2 \log' 2$. On déduira aisément de $\log' 4$, le $\log' 5$, en faisant $n = 4$ et $z = 1$. Pour trouver le logarithme de 6, on mettra $6 = 3.2$, d'où l'on tire $\log' 6 = \log' 3 + \log' 2$. Ces deux derniers logarithmes étant déjà trouvés, on connaît aussi celui de 6. De là il est clair qu'en général on n'a qu'à chercher les logarithmes népériens des nombres premiers à l'aide de la série trouvée ci-dessus; on en déduira aisément ceux de tous les nombres composés.

L'expression trouvée dans le numéro précédent

$$\log(1+x) = \log e\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right),$$

devient pour le logarithme népérien,

$$\log'(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots.$$

Il suit de là que si l'on veut passer du logarithme né-

périen à celui du même nombre dans un système quelconque, on n'a qu'à multiplier le logarithme népérien par $\log e$, c'est-à-dire par le logarithme du nombre 2,71828... pris dans le système qu'on veut adopter. Ce facteur $\log e$, qui diffère pour chaque système, s'appelle *le module* du système. Pour le système de *Briggs*, dont la base est, comme on sait, égale à 10, le module, qu'on désigne fréquemment par log vulg. e, ou log tab. e, ou log brig. e, est $= 0,434294\ldots$ Nous le trouverons aisément par la série donnée à la fin du numéro précédent, en faisant $n = 1$, $z = 9$. En effet, on obtient ainsi

$$\log \text{tab. } 10 = \log \text{tab. } 1 + 2 \log \text{tab. } e \left[\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \ldots\right],$$

c'est-à-dire

$$1 = 2 \log \text{tab. } e \left[\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \ldots\right],$$

d'où l'on trouve pour log tab. e, ou pour le module du système de Briggs, la valeur ci-dessus. On peut encore opérer plus commodément en cherchant $\log' 10 = \log' 5 + \log' 2$ par la série trouvée au commencement de ce numéro, suivant le procédé ci-dessus exposé; on aura alors

$$\log \text{vulg. } 10 = \log \text{vulg. } e \log' 10,$$

ou

$$\log \text{vulg. } e = \frac{1}{\log' 10}.$$

Réciproquement, pour passer du logarithme d'un nombre dans un système quelconque à celui de Néper, il est visible, d'après ce qui a été dit, qu'il faut multiplier le logarithme connu par $\frac{1}{\log e}$, en prenant $\log e$ dans le système donné. En passant, par exemple, du système de Briggs au népérien, $\frac{1}{\log e}$ est égal à $\frac{1}{0,434294\ldots} = 2,30258\ldots$

C'est par cette fraction qu'il faudra par conséquent multiplier le logarithme d'un nombre dans le système de Briggs, pour obtenir le logarithme népérien du même nombre.

Remarque. Nous entendrons dans la suite, par le signe *log*, toujours le logarithme népérien.

22. Voici maintenant quelques exemples de la différenciation des fonctions exponentielles et logarithmiques.

(1) Soit $y = x^z$, où z et y sont fonctions de x. On a, en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation,

$\log y = z.\log x$, d'où (11) $\mathrm{d}.\log y = z\,\mathrm{d}.\log x + \log x.\mathrm{d}z$,

ou (19)

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = z.\frac{\mathrm{d}x}{x} + \log x.\mathrm{d}z,$$

d'où enfin,

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}.x^z = \frac{x^z.z.\mathrm{d}x}{x} + \log x.x^z.\mathrm{d}z.$$

(2) Soit

$$y = \log\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Multipliant d'abord le numérateur et le dénominateur de la fraction sous le signe du logarithme par $(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$y = \log\left[\frac{1 + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\right];$$

soit maintenant

$$\frac{1 + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} = z \quad \text{et} \quad 1 + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = u;$$

de là

$$\mathrm{d}u = \frac{-x\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathrm{d}z = \frac{-\mathrm{d}x\,[1 + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}]}{x^2.(1-x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

donc

$$dy = \frac{-dx}{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le lecteur s'exercera en résolvant les problèmes suivans, dont on n'a donné que les résultats.

(3) Soit

$$y = \log\left[\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-x}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En multipliant d'abord la fraction du radical au numérateur et au dénominateur par $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+x$, il vient

$$y = \log\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

On aura

$$dy = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

(4) Soit

$$y = \log\left[\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

On trouvera

$$dy = \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

De la Différentielle de l'arc.

23. Considérons maintenant de nouveau la série dans le n° 7.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + y''\Delta x + \ldots,$$

qui se désigne aussi (5) par

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \psi\Delta x;$$

y' ou p (6) est une fonction seulement de x; mais $\psi\Delta x$ renferme Δx aussi bien que x. Si l'assertion faite dans le numéro cité était généralement vraie, savoir, que $\psi\Delta x$ devient nul dans la supposition de $\Delta x = 0$, ou que la série se réduit à p, il faudrait qu'elle eût lieu pour toute valeur de x. Développons, pour examiner cela par le moyen du théorème de Taylor, la série de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour la fonction $y = (x^3 - a^2)^{\frac{3}{2}}$.

On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x\,(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(6x^2 - 3a^2)\,\Delta x}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\,1.2.} + \ldots.$$

Dans la supposition de $\Delta x = 0$ et en même temps de $x = a$, chaque terme de la suite $\psi\Delta x$ devient $\frac{0}{0}$, expression d'une quantité indéterminée, laquelle nous allons considérer dans la suite et qui n'est pas nulle dans tous les cas. On conclut de là que, pour $\Delta x = 0$, $\psi\Delta x$ ne devient qu'en général égal à zéro, c'est-à-dire non pas pour toute valeur de x.

De même, la seconde proposition faite dans le n° 7, savoir que la série de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ s'approche de plus en plus de p à mesure que Δx diminue, n'est pas vraie pour toute valeur de x, comme on se convaincra aisément par l'exemple précédent, où, pour $x = a$, p devient nul, et chaque terme de $\psi\Delta x$ infini; au moins il n'est pas clair comment une série (dans notre cas, $\psi\Delta x$), dont chaque terme est infini, doive s'approcher de plus en plus de zéro, après être multipliée par une quantité de plus en plus décroissante.

Nous allons considérer maintenant de plus près ce décroissement de $\psi\Delta x$ qui augmente de plus en plus avec le décroissement de Δx et dont nous venons de montrer qu'il n'est vrai qu'en général. On ne saurait mettre des bornes

au décroissement de Δx, ni à celui de $\psi\Delta x$ qui en résulte : car, si par le décroissement de Δx, $\psi\Delta x$ était déjà devenu une fort petite quantité, on pourrait rendre Δx encore moindre, en sorte que $\psi\Delta x$ deviendrait encore moindre que la fort petite quantité précédemment mentionnée.

On s'exprime là-dessus, avec raison, en ces termes : « $\psi\Delta x$ peut devenir, par un décroissement de Δx, plus petit que toute quantité assignable, quelque petite qu'elle soit. » En conséquence, il serait contradictoire de vouloir déterminer la grandeur ou la petitesse de l'expression $\psi\Delta x$ dans sa moindre valeur, puisque, d'après ce qui précède, il n'existe pas une telle valeur qui soit la moindre, la valeur $\Delta x = 0$ en étant exclue.

Pour éclaircir cela par un exemple tiré de la Géométrie élémentaire, imaginons un cercle dans lequel soit inscrit un polygone régulier d'un nombre indéfini de côtés. Que l'on compare la différence des deux aires, du polygone et du cercle, à notre Δx; elle a, comme $\psi\Delta x$, une certaine valeur assignable, mais qui peut, en poursuivant de partager en parties égales les côtés du polygone, devenir moindre que toute aire, quelque petite qu'on l'imagine.

24. On sera en état, d'après ce qui a été dit, de concevoir la vérité de la proposition qui suit.

Si ces deux expressions

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} > \alpha + \psi\Delta x \quad \text{et} \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} < \alpha + \psi'\Delta x,$$

sont vraies pour une valeur quelconque, tant de x que de Δx, on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha.$$

φ et α sont ici des fonctions de x ; ψ et ψ' désignent des suites ordonnées suivant les puissances entières de Δx, dont

les coefficiens sont des fonctions de x. En conséquence, $\psi\Delta x$ et $\psi'\Delta x$, quoiqu'ils diffèrent entre eux quant à la valeur, sont conformes entre eux, en tant qu'ils puissent, en général, devenir pour toute valeur de x, par le décroissement de Δx, plus petits que toute quantité assignable, quelque petite qu'elle soit.

Pour la démonstration, mettons que $\frac{d\varphi}{dx}$ n'étant pas égal à α, soit ou plus grand ou plus petit. Supposons premièrement

$$\frac{d\varphi}{dx} > \alpha, \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \alpha + \beta,$$

où β étant de la même nature que α, savoir une fonction de x, et indépendant de Δx, peut prendre, pour une valeur quelconque de x, une valeur assignable aussi petite que l'on voudra. On obtiendrait de cette manière (6)

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \alpha + \beta + \pi.\Delta x,$$

où $\pi.\Delta x$ est de la même nature que $\psi\Delta x$ et $\psi'\Delta x$. Comparé à la seconde supposition

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} < \alpha + \psi'\Delta x,$$

on aura

$$\alpha + \beta + \pi.\Delta x < \alpha + \psi'.\Delta x,$$

ou

$$\beta < \psi'.\Delta x - \pi.\Delta x,$$

ce qui ne peut avoir lieu pour toute valeur de x, parce que $\psi'.\Delta x - \pi.\Delta x$ (23), pour une assez petite valeur de Δx, peut devenir moindre que toute quantité assignable, quelque petite qu'elle soit, donc aussi moindre que β.

En second lieu, si l'on mettait

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha - \beta,$$

on obtiendrait

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \alpha - \beta + \pi.\Delta x,$$

d'où l'on tirerait, comparé à la première supposition,

$$\alpha - \beta + \pi.\Delta x > \alpha + \psi.\Delta x,$$

ou

$$\pi.\Delta x - \psi\Delta x > \beta,$$

même contradiction que la précédente. Donc, $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ ne pouvant être ni moindre ni plus grand que α, il faut qu'on ait

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha.$$

Le lecteur prouvera aisément que la démonstration précédente et la proposition par là établie est juste dans le cas que, dans les deux suppositions, l'une des deux quantités ψ et ψ' soit nulle, ou que ψ ou ψ', ou tous les deux, soient négatifs.

25. Montrons maintenant géométriquement, dans une courbe, les expressions Δx et $\Delta y = p.\Delta x + \psi.\Delta x^2$ (5).

Soit (fig. 1, 2, 3, 4) EMN une courbe quelconque, AP l'axe des abscisses, A l'origine des coordonnées rectangles. Les abscisses seront prises en sens positif de A à P, et les ordonnées sont positives au-dessus de l'axe des abscisses.

Dans les figures 2 et 4, la courbe a tourné sa concavité vers l'axe des abscisses; dans les figures 1 et 3, sa convexité.

Par le point M, appelé le *point de contact,* dont les coordonnées sont $AP = x$, et $PM = y$, sont menées la tangente MM′ et la sécante MN. La première de ces lignes droites rencontre l'axe des abscisses au point B, la dernière

au point C. Ces deux points se trouvent dans les fig. 1 et 2 du côté négatif, et dans les fig. 3 et 4, du côté positif de l'ordonnée. PP′ soit $= \Delta x$; l'ordonnée élevée en P′ coupe la courbe aussi bien que la sécante au point N, et la tangente au point M′; on aura donc $P'N = y + \Delta y$; et si l'on mène par M une parallèle à l'axe des abscisses MQ, on aura $NQ = \Delta y$.

Dans les quatre figures, on tire d'abord des deux triangles semblables M′MQ et MBP,

$$M'Q : MQ = MP : BP,$$

ou

$$M'Q : \Delta x = y : BP;$$

d'où

$$PB = \frac{y.\Delta x}{M'Q};$$

et les triangles semblables MNQ et MPC donnent

$$NQ : MQ = MP : PC,$$

ou

$$\Delta y : \Delta x = y : PC;$$

d'où

$$PC = \frac{y.\Delta x}{\Delta y},$$

ou [y étant donné en fonction de x, (nos 5, 17), $\Delta y = p.\Delta x + \downarrow.\Delta x^2$],

$$PC = \frac{y.\Delta x}{p.\Delta x + \downarrow.\Delta x^2} = \frac{y}{p + \downarrow.\Delta x}.$$

Or, il est clair, par les figures, qu'à mesure du décroissement de Δx, la sécante tend vers la tangente, et le point C vers le point B; en sorte que, lorsque $\Delta x = 0$, la sécante se confond avec la tangente, et qu'on aura PC = PB. En conséquence, si l'on met $\Delta x = 0$ dans l'expression ci-dessus

de PC, et en même temps PB au lieu de PC, on obtiendra

$$PB = \frac{y}{p};$$

comparant cette valeur à celle qu'on a précédemment obtenue pour PB, on a

$$\frac{y.\Delta x}{M'Q} = \frac{y}{p},$$

et l'on tire de là

$$M'Q = p.\Delta x.$$

Voilà donc la valeur absolue de M'Q; examinons maintenant la valeur de cette ligne à l'égard de sa position dans les quatre diverses figures, ou sa valeur relative à son signe. D'abord il est aisé de voir que la position de M'Q dans les fig. 3 et 4 est opposée à celle dans les fig. 1 et 2, à l'égard de MQ parallèle à l'axe des abscisses; on aura donc M'Q positif dans les fig. 1 et 2, négatif dans les fig. 3 et 4. On voit de même que NQ ou Δy est positif dans les fig. 1 et 2, mais négatif dans les fig. 3 et 4. On aura par conséquent

Fig. 1. $M'N = \Delta y - p.\Delta x = +\psi.\Delta x^2$,

Fig. 2. $M'N = p.\Delta x - \Delta y = -\psi.\Delta x^2$,

Fig. 3. $M'N = -p.\Delta x - (-\Delta y) = -p.\Delta x + \Delta y = +\psi.\Delta x^2$,

Fig. 4. $M'N = -\Delta y - (-p.\Delta x) = -\psi.\Delta x^2$.

On voit par là que la valeur relative de M'N est $+\psi.\Delta x^2$ dans les fig. 1 et 3, et qu'elle est $-\psi.\Delta x^2$ dans les fig. 2 et 4; la valeur absolue de M'N est donc $\psi.\Delta x^2$.

Pour la position respective de la tangente et de la courbe, par rapport à l'axe des abscisses, comme elle est représentée dans les quatre figures, on aura de plus les valeurs suivantes relatives de Δx,

Fig. 1. $\Delta y = +p.\Delta x + \psi.\Delta x^2$,
Fig. 2. $\Delta y = +p.\Delta x - \psi.\Delta x^2$,
Fig. 3. $\Delta y = -p.\Delta x + \psi.\Delta x^2$,
Fig. 4. $\Delta y = -p.\Delta x - \psi.\Delta x^2$.

Donc, il résulte de ce qui a été dit que dans la formule

$$\Delta y = p.\Delta x + \psi.\Delta x^2,$$

où p et ψ sont pris dans leur valeur absolue, la première partie $p.\Delta x$ représente la ligne M'Q; la dernière, $\psi.\Delta x^2$, la ligne M'N, en considérant les deux lignes en sens absolu.

Remarque. La supposition faite au commencement de ce numéro, que les abscisses positives marchent vers la droite, et les ordonnées positives au-dessus de l'axe des abscisses, est dorénavant adoptée pour toutes les figures, à moins qu'on n'avertisse autrement.

26. Nous trouverons aisément, à l'aide des deux numéros précédens, la différentielle de l'arc d'une courbe.

Soit (fig. 1, 2, 3, 4) l'arc EM $= \varphi$; φ étant une fonction de x, MN sera la différence de φ; pour la différence de x, savoir PP' $= \Delta x$, et par conséquent MN $= \Delta\varphi$.

L'arc MN est plus grand que la corde MN et plus petit que la somme des deux lignes MM' + NM'. Or, on a la corde

$$\mathrm{MN} = (\mathrm{MQ}^2 + \mathrm{NQ}^2)^{\frac{1}{2}} = (25)\,[\Delta x^2 + \Delta y^2]^{\frac{1}{2}} = (5)$$

$$[\Delta x^2 + (p.\Delta x + \psi.\Delta x^2)^2]^{\frac{1}{2}} = \Delta x\,(1 + p^2 + 2p\psi.\Delta x + \psi^2.\Delta x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Le radical développé comme un binome, en regardant $1 + p^2$ comme la première, et $2p\psi.\Delta x + \psi^2.\Delta x^2$ comme la deuxième partie, et désignant par π tous les termes qui renferment Δx, on trouve

$$\mathrm{MN} = \Delta x\,(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \pi.\Delta x^2.$$

On a de plus

$$MM' = (MQ^2 + M'Q^2)^{\frac{1}{2}} = (\text{n}^\circ\ 25)\ (\Delta x^2 + p^2 . \Delta x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \Delta x\,(1 + p^2)^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$MM' + NM' = (\text{n}^\circ\ 25)\ \Delta x\,(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \psi . \Delta x^2.$$

On a, d'après le précédent,

$$\Delta\varphi > \Delta x\ (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \pi . \Delta x^2,$$

et

$$\Delta\varphi < \Delta x\ (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \psi . \Delta x^2,$$

ou

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} > (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \pi . \Delta x,$$

et

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} < (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \psi . \Delta x,$$

d'où (par le n° 24)

$$\frac{d\varphi}{dx} = (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ou} \quad = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou, enfin,

$$d\varphi = dx\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire que la différentielle de l'arc est égale à la racine quarrée de la somme des quarrés des différentielles des deux variables.

De la Différenciation des fonctions circulaires.

27. On se propose, pour exemple, de chercher la différentielle de l'arc de cercle.

Le cercle a pour équation rapportée au centre, $y^2 + x^2 = r^2$, d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}.$$

Il en résulte

$$d\varphi = dx\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{y}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{r.dx}{y}.$$

En faisant le rayon $r = 1$, on a

$$d\varphi = \frac{dx}{y}.$$

La différentielle de l'arc du cercle nous met en état de trouver les différentielles de toutes les lignes trigonométriques par le procédé qui suit.

Supposant le rayon du cercle $= 1$, on a pour équation du cercle, rapportée au centre,

$$y^2 + x^2 = 1.$$

On a alors, dans la fig. 5,

$$CP = AM = x, \quad \text{et} \quad MP = AC = y.$$

Soit l'arc $BM = \varphi$, l'angle BCM sera aussi $= \varphi$, puisque le rayon est égal à l'unité. Il est encore évident que

$$AM = x = \sin\varphi \quad \text{et} \quad AC = y = \cos\varphi.$$

Substituant ces valeurs de x et y dans la différentielle de l'arc de cercle $d\varphi = \frac{dx}{y}$, on obtient

$$d\varphi = \frac{d.\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

ou

$$d.\sin\varphi = \cos\varphi.d\varphi,$$

c'est-à-dire que la différentielle du sinus d'un arc est égale au cosinus de l'arc, multiplié par la différentielle de l'arc.

En mettant $\sin\varphi = (1 - \cos\varphi^2)^{\frac{1}{2}}$, on a (12)

$$d.\sin\varphi = \frac{-\cos\varphi.d.\cos\varphi}{(1-\cos\varphi^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\cos\varphi.d.\cos\varphi}{\sin\varphi};$$

or, nous avons trouvé précédemment

$$d.\sin\varphi = \cos\varphi.d\varphi;$$

donc, on a,

$$\frac{-\cos\varphi.d.\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cos\varphi.d\varphi,$$

ou

$$d.\cos\varphi = -\sin\varphi.d\varphi,$$

c'est-à-dire que la différentielle du cosinus d'un arc est égale au sinus de l'arc, multiplié par la différentielle de l'arc, et le résultat pris du signe négatif.

De plus, on tire de $\tang\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

$$d.\tang\varphi = d.\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = (n^{\circ}\ 13)\ \frac{\cos\varphi.d.\sin\varphi - \sin\varphi.d.\cos\varphi}{\cos\varphi^2}.$$

Substituant les valeurs précédemment trouvées de $d.\sin\varphi$ et de $d.\cos\varphi$, il vient

$$d.\tang\varphi = \frac{\cos\varphi^2.d\varphi + \sin\varphi^2 d\varphi}{\cos\varphi^2} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2},$$

c'est-à-dire que la différentielle de la tangente d'un arc de cercle est égale à la différentielle de l'arc, divisée par le quarré du cosinus de l'arc.

A cause de $\cotang\varphi = \frac{1}{\tang\varphi}$, on a

$$\mathrm{d.cotang}\,\varphi = \mathrm{d.}\frac{1}{\mathrm{tang}\,\varphi} = (\text{n° } 13)\ \frac{-\mathrm{d.\,tang}\,\varphi}{\mathrm{tang}\,\varphi^2}$$
$$= \frac{-\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi^2.\mathrm{tang}\,\varphi^2} = \frac{-\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi^2},$$

c'est-à-dire que la différentielle de la cotangente d'un arc de cercle est égale à la différentielle de l'arc, divisée par le quarré du sinus, le résultat pris du signe négatif.

C'est par un procédé semblable que nous trouverons les différentielles des autres lignes trigonométriques. En effet, on tire de $\mathrm{séc}\,\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$,

$$\mathrm{d.séc}\,\varphi = \frac{-\mathrm{d.}\cos\varphi}{\cos\varphi^2} = \frac{\sin\varphi.\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi^2};$$

et l'on tire de $\mathrm{coséc}\,\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}$,

$$\mathrm{d.coséc}\,\varphi = \frac{-\mathrm{d.}\sin\varphi}{\sin\varphi^2} = \frac{-\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi^2};$$

on trouve de $\sin\text{vers.}\,\varphi = 1 - \cos\varphi$,

$$\mathrm{d.sin\ vers.}\,\varphi = -\mathrm{d.}\cos\varphi = \sin\varphi.\mathrm{d}\varphi;$$

et enfin, de $\cos\text{vers.}\,\varphi = 1 - \sin\varphi$,

$$\mathrm{d.cos\ vers.}\,\varphi = -\mathrm{d.}\sin\varphi = -\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi.$$

Remarque. D'après cela, on a aussi, si n représente un nombre constant, puisque $\mathrm{d.}(nx) = n.\mathrm{d}x$ (n° 11),

$$\mathrm{d.}\sin nx = n.\mathrm{d}x.\cos nx,\quad \mathrm{d.}\cos nx = -n.\mathrm{d}x.\sin nx,$$

$$\mathrm{d.tang}\,nx = \frac{n\mathrm{d}x}{(\cos nx)^2},\ \text{etc.}$$

28. Nous pourrons aisément trouver par les différen-

tielles des lignes trigonométriques que nous venons d'obtenir, les différentielles de l'arc par les lignes respectives trigonométriques.

En effet, on tire de $d.\sin\varphi = \cos\varphi . d\varphi$,

$$d\varphi = \frac{d.\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{d.\sin\varphi}{(1-\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}},$$

c'est-à-dire que la différentielle de l'arc est égale à la différentielle du sinus de l'arc, divisée par le cosinus de l'arc.

On tire de $d.\cos\varphi = -\sin\varphi . d\varphi$,

$$d\varphi = \frac{-d.\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{-d.\cos\varphi}{(1-\cos\varphi^2)^{\frac{1}{2}}},$$

c'est-à-dire que la différentielle de l'arc est égale à la différentielle du cosinus, divisée par le sinus, le résultat pris du signe négatif.

On trouve par un procédé semblable de $d.\tang\varphi = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$,

$$d\varphi = \cos\varphi^2 . d.\tang\varphi = \frac{d.\tang\varphi}{\sec\varphi^2} = \frac{d.\tang\varphi}{1+\tang\varphi^2},$$

c'est-à-dire que la différentielle de l'arc est égale à la différentielle de la tangente, divisée par le quarré de la sécante.

De $d.\cotang\varphi = \frac{-d\varphi}{\sin\varphi^2}$, on obtient

$$d\varphi = -\sin\varphi^2 . d.\cotang\varphi = \frac{-d.\cotang\varphi}{\operatorname{cosec}\varphi^2} = \frac{-d.\cotang\varphi}{1+\cotang\varphi^2},$$

c'est-à-dire que la différentielle de l'arc est égale à la différentielle de la cotangente, divisée par le quarré de la cosécante, le résultat pris du signe négatif.

Le lecteur exprimera aisément au moyen des formules du numéro précédent, la différentielle de l'arc par les autres lignes trigonométriques.

29. Rangeons ici pour l'inspection plus commode les formules démontrées dans les deux numéros précédens.

En représentant par x successivement chacune des lignes trigonométriques de l'arc φ, on aura

pour $x = \sin\varphi$, $\quad dx = d\varphi\,(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\quad d\varphi = \dfrac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$,

pour $x = \cos\varphi$, $\quad dx = -d\varphi\,(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\quad d\varphi = \dfrac{-dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$,

pour $x = \text{tang}\,\varphi$, $\quad dx = d\varphi\,(1 + x^2)$, $\quad d\varphi = \dfrac{dx}{1 + x^2}$,

pour $x = \text{cotang}\,\varphi$, $\quad dx = -d\varphi\,(1 + x^2)$, $\quad d\varphi = \dfrac{-dx}{1 + x^2}$,

pour $x = \text{séc}\,\varphi$, $\quad dx = d\varphi . x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$, $\quad d\varphi = \dfrac{dx}{x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$,

pour $x = \text{coséc}\,\varphi$, $\quad dx = -d\varphi . x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$, $\quad d\varphi = \dfrac{-dx}{x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$,

pour $x = \sin\text{vers}\,\varphi$, $\quad dx = d\varphi . [x(2 - x)]^{\frac{1}{2}}$, $\quad d\varphi = \dfrac{dx}{[x(2 - x)]^{\frac{1}{2}}}$,

pour $x = \cos\text{vers}\,\varphi$, $\quad dx = -d\varphi . [x(2 - x)]^{\frac{1}{2}}$, $\quad d\varphi = \dfrac{-dx}{[x(2 - x)]^{\frac{1}{2}}}$.

Dans ces formules, le rayon du cercle est supposé, comme on a remarqué dans le n° 27, égal à l'unité. Mais il sera aisé de les rapporter au rayon $= r$, si l'on se rappelle des élémens de la Géométrie, que les arcs aussi bien que les lignes trigonométriques, relatives aux mêmes angles dans des cercles à rayons différens, sont entre eux comme leurs rayons respectifs.

Désignons pour cela un certain arc dont le rayon $= 1$

par φ, et celui dont le rayon $= r$ par φ_r, et de même la ligne trigonométrique correspondante par x et x_r; on aura

$$\varphi : \varphi_r = 1 : r, \quad \text{et } x : x_r = 1 : r,$$

d'où

$$\varphi = \frac{\varphi_r}{r}; \qquad \text{et} \qquad x = \frac{x_r}{r};$$

donc

$$d\varphi = \frac{d\varphi_r}{r}, \qquad \text{et} \qquad dx = \frac{dx_r}{r}.$$

Substituant au lieu de x, dx, φ et $d\varphi$ ces valeurs, dans les formules ci-dessus, on obtiendra les différentielles de l'arc et des lignes trigonométriques pour le rayon $= r$. C'est ainsi, par exemple, que les formules pour le sinus

$$dx = d\varphi\,(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

se changent en celles-ci :

$$\frac{dx_r}{r} = \frac{d\varphi_r}{r}\left(1 - \frac{x_r^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{d\varphi_r}{r^2}\,(r^2 - x_r^2)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\frac{d\varphi_r}{r} = \frac{\frac{dx_r}{r}}{\left(1 - \frac{x_r^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx_r}{(r^2 - x_r^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ou en

$$dx_r = \frac{d\varphi_r\,(r^2 - x_r^2)^{\frac{1}{2}}}{r}, \quad \text{et} \quad d\varphi_r = \frac{r.\,dx_r}{(r^2 - x_r^2)^{\frac{1}{2}}},$$

c'est-à-dire que l'on a, lorsque x représente le sinus de l'arc φ, dont le rayon $= r$,

$$dx = \frac{d\varphi\,(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{r dx}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on opère de la même manière sur toutes les formules ci-dessus, on obtient pour le rayon $= r$,

pour $x = \sin\varphi$, $\quad dx = \dfrac{d\varphi\,(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{r}$, $\quad d\varphi = \dfrac{r\,dx}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$,

pour $x = \text{cosin}\,\varphi$, $\quad dx = \dfrac{-d\varphi\,(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{r}$, $\quad d\varphi = \dfrac{-r\,dx}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$;

pour $x = \text{tang}\,\varphi$, $\quad dx = \dfrac{d\varphi\,(r^2 + x^2)}{r^2}$, $\quad d\varphi = \dfrac{r^2 dx}{r^2 + x^2}$,

pour $x = \text{cotang}\,\varphi$, $\quad dx = \dfrac{-d\varphi\,(r^2 + x^2)}{r^2}$, $\quad d\varphi = \dfrac{-r^2 dx}{r^2 + x^2}$,

pour $x = \text{séc}\,\varphi$, $\quad dx = \dfrac{d\varphi . x\,(x^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}{r^2}$, $\quad d\varphi = \dfrac{r^2 dx}{x(x^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}$,

pour $x = \text{coséc}\,\varphi$, $\quad dx = \dfrac{-d\varphi . x\,(x^2 - r^2)}{r^2}$, $\quad d\varphi = \dfrac{-r^2 dx}{x(x^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Quand il s'agira dans la suite des fonctions trigonométriques, on supposera toujours le rayon $= 1$, à moins qu'on n'avertisse expressément du contraire.

30. Nous voilà maintenant en état de trouver le coefficient différentiel et par cela aussi les différentielles des ordres supérieurs des fonctions trigonométriques qui renferment des arcs de cercle et des lignes trigonométriques: nous pouvons donc aussi, par le n° 16, développer une telle fonction trigonométrique en série, suivant les puissances entières de l'indépendante.

On a d'abord dans la fonction $y = \sin x$ (n° 27),

$$\frac{dy}{dx} = p = \cos x,\quad q = -\sin x,\quad r = -\cos x,\quad s = +\sin x,\ \text{etc.};$$

donc (n° 16)

$$y_{x=0}=0,\ p_{x=0}=1,\ q_{x=0}=0,\ r_{x=0}=-1,\ s_{x=0}=0,\ \text{etc.}$$

Il vient, par conséquent,

$$y=\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots,$$

série qui exprime le sinus d'un arc par ce même arc.

Pour $y=\cos x$, on obtient (n° 27)

$$p=-\sin x,\ q=-\cos x,\ r=\sin x,\ s=\cos x,\ \text{etc.},$$

d'où

$$y_{x=0}=1,\ p_{x=0}=0,\ q_{x=0}=-1,\ r_{x=0}=0,\ s_{x=0}=1,\ \text{etc.};$$

donc (n° 16)

$$y=\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}-\ldots,$$

série qui exprime le cosinus d'un arc par ce même arc.

31. Par le même procédé qu'on a exprimé en série le sinus et le cosinus par l'arc correspondant, on peut aussi (n° 16) exprimer toute autre ligne trigonométrique par son arc respectif. Mais sans nous y arrêter, nous nous proposons plutôt de chercher réciproquement une série pour l'arc exprimé par sa ligne trigonométrique.

Ainsi soit représenté par y l'arc dont le sinus $=x$, ou suivant la notation ordinaire

$$y=\text{arc}\,(\sin=x);$$

on a par le n° 28

$$\frac{dy}{dx}=p=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

d'où (n° 13)

$$q=x\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},\quad r=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2\,(1-x^2)^{-\frac{5}{2}},\ \text{etc.},$$

de plus,

$y_{x=0} = 0$ (en comptant l'arc et le diamètre à partir d'un bout du dernier)

$$p_{x=0} = 1, \quad q_{x=0} = 0, \quad r_{x=0} = 1, \quad \text{etc.}$$

On a par conséquent (n° 16),

$$y = \text{arc}(\sin = x) = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{3.3.x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{3.3.5.5.x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

Pour $y = \text{arc}(\cos = x)$, on obtient, en procédant de la même manière, la série qui suit :

$$y = \text{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{3.3.x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{3.3.5.5.x^7}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots;$$

on trouverait d'ailleurs cette série immédiatement par la précédente, trouvée pour le sinus, en observant que $\text{arc}(\cos = x) = \frac{\pi}{2} - \text{arc}(\sin = x)$.

De plus, si l'on met $y = \text{arc}(\text{tang} = x)$, on a (n° 28),

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{1}{1 + x^2}, \quad q = -2x(1 + x^2)^{-2},$$
$$r = -2(1 + x^2)^{-2} + 8x^2(1 + x^2)^{-3}, \text{ etc.},$$

d'où

$$y_{x=0} = 0, \quad p_{x=0} = 1, \quad q_{x=0} = 0, \quad r_{x=0} = -2, \quad \text{etc.};$$

donc (n° 16)

$$y = \text{arc}(\text{tang} = x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Les commençans chercheront, pour s'exercer en différenciant, à développer eux-mêmes plusieurs suites, tant pour des lignes trigonométriques, par exemple, pour la tangente, exprimées par l'arc, que pour des arcs exprimés

par une ligne trigonométrique. Ils feront usage du même procédé que l'on a employé dans les nos 30 et 31.

32. La série donnée dans le numéro précédent pour arc ($\sin = x$) est assez convergente, lorsque x est supposé une fraction peu considérable, et quelques-uns des premiers termes suffiront pour évaluer assez exactement la valeur de l'arc. Si l'on fait, par exemple, $x = \frac{1}{2}$, il vient $y = \frac{\pi}{6}$, c'est-à-dire la sixième partie de la moitié de la circonférence du cercle. On obtient ainsi

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1.1}{1.2.3.2^3} + \frac{3.3}{1.2.3.4.5}.\frac{1}{2^5} + \ldots;$$

prenant les six premiers termes de cette série et multipliant le résultat par 6, on obtient une valeur assez exacte pour la moitié de la circonférence, savoir, $\pi = 3,14159\ldots$

Pour rendre la série trouvée dans le numéro précédent pour arc ($\tang = x$), plus commode pour évaluer la longueur d'un arc de cercle, on fait usage de la formule connue

$$\tang(a+b) = \frac{\tang a + \tang b}{1 - \tang a.\tang b}.$$

En y mettant $\tang a = \frac{1}{2}$, et $a + b = \frac{\pi}{4}$, on obtient

$$1 = \frac{\frac{1}{2} + \tang b}{1 - \frac{\tang b}{2}};$$

d'où

$$\tang b = \frac{1}{3}.$$

Il vient par conséquent

$$\frac{\pi}{4} = a + b = \text{arc}\left(\tang = \frac{1}{2}\right) + \text{arc}\left(\tang = \frac{1}{3}\right);$$

ou, d'après le n° 31,

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right).$$

On trouve donc

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3+2}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{3^3+2^3}{6^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{3^5+3^5}{6^5}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{3^7+2^7}{6^7}\right) + \ldots,$$

série dont un petit nombre des premiers termes suffit déjà pour évaluer assez exactement la valeur de $\frac{\pi}{4}$.

33. Reprenons maintenant les séries pour le sinus et le cosinus, trouvées n° 30, pour montrer le rapport qui a lieu entre elles et la série pour e^x, donnée n° 18, lorsque x est un nombre imaginaire.

On sait que toutes les quantités imaginaires se peuvent ramener à la forme

$$a \pm b\sqrt{-1},$$

parce que toute équation algébrique à une quantité inconnue se peut décomposer en facteurs réels du second ou du premier degré. Or, on voit, dans l'équation du second degré,

$$(x + a)^2 + b^2 = 0,$$

qui a pour racines,

$$x = -a - b\sqrt{-1}, \quad \text{et} \quad x = -a + b\sqrt{-1},$$

et par conséquent les facteurs

$$(x + a + b\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad (x + a - b\sqrt{-1}),$$

en comparant les coefficiens de x, et les termes constans, que

$$a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1} = 2a,$$

et

$$(a + b\sqrt{-1})\,(a - b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2;$$

il en résulte que

$$(b\sqrt{-1})\,(-b\sqrt{-1}) = +b^2 \text{ et } (b\sqrt{-1})\,(b\sqrt{-1}) = -b^2,$$

ou que

$$\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1.$$

D'après cela, il est visible que les expressions $\sqrt{-1}$, comme faisant partie des facteurs d'une équation du second degré, quoique sans aucune signification réelle par elles-mêmes, peuvent subir entre elles les opérations de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, de la division, de l'élévation aux puissances, dont les exposans sont des nombres réels et constans, entiers ou fractionnaires, et que toutes ces opérations sont équivalentes aux opérations correspondantes sur des quantités réelles, en sorte que les quantités réelles qui en résultent doivent être regardées comme tout-à-fait justes. Pour l'exposition ultérieure de ces observations, on renvoie le lecteur aux livres qui traitent la théorie des équations.

On aura donc, si m désigne un nombre impair,

$$(x\sqrt{-1})^{2m} = -x^{2m}, \quad (-x\sqrt{-1})^{2m} = -x^{2m},$$

$$(x\sqrt{-1})^{4m} = +x^{4m}, \quad (-x\sqrt{-1})^{4m} = +x^{4m},$$

$$(x\sqrt{-1})^{2m+1} = -x^{2m+1}.\sqrt{-1}, \quad (-x\sqrt{-1})^{2m+1} = +x^{2m+1}.\sqrt{-1},$$

$$(x\sqrt{-1})^{4m+1} = +x^{4m+1}.\sqrt{-1}, \quad (-x\sqrt{-1})^{4m+1} = -x^{4m+1}.\sqrt{-1}.$$

D'après cela, on aura, lorsqu'on substitue successivement dans la série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$x\sqrt{-1}$ et $-x\sqrt{-1}$, au lieu de x,

$$e^{x\sqrt{-1}}=1+\frac{x.\sqrt{-1}}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5}\ldots$$

$$e^{-x\sqrt{-1}}=1-\frac{x\sqrt{-1}}{1}-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5}\ldots$$

Ajoutant ensemble ces deux séries et divisant la somme par 2, il vient

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots,$$

la même série que nous avons trouvée pour $\cos x$ dans le n° 30.

Retranchant ensuite les séries ci-dessus l'une de l'autre et divisant par $2\sqrt{-1}$, il vient

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2.\sqrt{-1}}=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots,$$

la même série que nous avons trouvée pour $\sin x$ dans le n° 30.

En conséquence de cela, on aura

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=\cos x \quad \text{et} \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin x,$$

d'où

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}.\sin x,$$

et

$$e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}\ \sin x.$$

C'est par ces formules que s'exprime le rapport du sinus et du cosinus, aux puissances du nombre e, quand les exposans sont imaginaires; cependant, à cause des expressions imaginaires qu'elles renferment, elles ne peuvent être regardées que comme des symboles, et on ne les peut non

plus mettre sur le même rang avec les formules qui renferment des expressions réelles.

Remarque. Puisqu'on opère sur $\sqrt{-1}$ dans le calcul comme sur une quantité constante, il suffira aussi, pour la différenciation des fonctions algébriques renfermant la quantité variable sous une forme imaginaire, de regarder l'expression $\sqrt{-1}$ comme constante. Nous aurons ainsi, par exemple,

$$\mathrm{d}.\sqrt{-x} = \mathrm{d}.\sqrt{x}.\sqrt{-1} = (\text{n}^{\text{o}}\ 12)\ \frac{\sqrt{-1}.\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}.$$

Des Fonctions fractionnaires qui, pour une certaine valeur de x, *deviennent* $\frac{0}{0}$.

34. On rencontre, dans les Mathématiques, des fonctions fractionnaires qui s'évanouissent pour une certaine valeur de x, tant au numérateur qu'au dénominateur, et qui, cependant, si l'on divise le numérateur et le dénominateur par un facteur commun, sont égales à une quantité déterminée qui s'appelle *la vraie valeur de la fonction.* Ainsi, par exemple, la fraction $\frac{ax - x^2}{a^2 - x^2}$ devient $\frac{0}{0}$ dans la supposition de $x = a$; mais en divisant le numérateur et le dénominateur par $a - x$, la fraction se changera en $\frac{x}{a+x}$, et elle devient maintenant, lorsque $x = a$, égale à $\frac{1}{2}$, ce qui est par conséquent la vraie valeur de la fonction fractionnaire proposée.

Pour trouver la vraie valeur d'une telle fonction fractionnaire qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x = a$, nous ferons usage du procédé donné précédemment pour le développement de toute fonction en série suivant les puissances entières de x.

Désignons en général par $\frac{u}{v}$ la fonction fractionnaire proposée; en y mettant maintenant au lieu de x, $a+h$ ou $a-h$, on développera ensuite u aussi bien que v suivant les puissances de h. Par cela $\frac{u}{v}$ se changera en

$$\frac{mh^{\alpha}+nh^{\beta}+\ldots.}{m'h^{\alpha'}+n'h^{\beta'}+\ldots.},$$

où $m, n\ldots$, et $m', n'\ldots$, ne renferment que a, et où les exposans $\alpha, \beta\ldots$, aussi bien que $\alpha', \beta'\ldots$, forment une série ascendante.

Il n'est pas nécessaire que ces exposans soient des nombres entiers, quoique la série de Maclaurin y employée développe la fonction en série suivant les puissances entières (n° 17). Soit, par exemple, $u=(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$, fonction qui devient $=0$ lorsque $x=a$; en y supposant $x=a+h$, la fonction devient

$$(2ah+h^2)^{\frac{1}{2}}=h.^{\frac{1}{2}}(2a+h)^{\frac{1}{2}},$$

ou, en développant le radical suivant le n° 16,

$$=(2a)^{\frac{1}{2}}.h^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}}.h^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}(2a)^{-\frac{3}{2}}.h^{\frac{5}{2}}+\ldots,$$

où les exposans de h ne sont visiblement que des fractions.

Si l'on mettait dans la fraction obtenue ci-dessus,

$$\frac{mh^{\alpha}+nh^{\beta}+\ldots.}{m'h^{\alpha'}+n'h^{\beta'}+\ldots.},$$

$h=0$, on obtiendrait nécessairement la même valeur que prend $\frac{u}{v}$, lorsque $x=a$. Cependant, pour ne plus obtenir

$\frac{0}{0}$, mais la vraie valeur, on se servira du procédé suivant :

On distinguera d'abord les trois cas, $\alpha > \alpha'$, $\alpha < \alpha'$, et $\alpha = \alpha'$. Dans le premier cas, on divise le numérateur et le dénominateur par $h^{\alpha'}$, on obtient

$$\frac{mh^{\alpha-\alpha'} + nh^{\beta-\alpha'} + \ldots}{m' + n'h^{\beta'-\alpha'} + \ldots}.$$

Dans le deuxième cas, on divise par h^{α}, on obtient

$$\frac{m + nh^{\beta-\alpha} + \ldots}{m'h^{\alpha'-\alpha} + n'h^{\beta'-\alpha} + \ldots}.$$

Dans le troisième cas, on divise par $h^{\alpha} = h^{\alpha'}$, on obtient

$$\frac{m + nh^{\beta-\alpha} + \ldots}{m' + n'h^{\beta'-\alpha} + \ldots}.$$

Il faut mettre ensuite $h = 0$; on obtient pour la vraie valeur dans le premier cas, 0; dans le deuxième cas, ∞; dans le troisième, $\frac{m}{m'}$.

35. Le procédé que nous venons d'exposer sera appliqué dans les exemples suivans, où nous ferons voir en même temps le facteur commun du numérateur et du dénominateur.

Exemple 1. Soit à trouver la vraie valeur de la fonction

$$\frac{m.\,\mathrm{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)}{x},$$

qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x = a$.

On met ici (n° 34) $x = 0 + h = h$; par cela on obtient

$$\frac{m \text{ arc}\left(\sin = \frac{h}{a}\right)}{h} = (\text{par le n° } 31) \frac{m\left(\frac{h}{a} + \frac{h^3}{a^3 . 1 . 2 . 3} + \ldots\right)}{h};$$

divisant maintenant le numérateur et le dénominateur par h, et mettant ensuite $h = 0$, on obtient pour la vraie valeur, $\frac{m}{a}$. Pour trouver le facteur commun, il faut développer le numérateur de la fraction proposée en série suivant x, par le moyen du n° 31; on obtient ainsi

$$\frac{m\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{a^3 . 1 . 2 . 3} + \ldots\right)}{x},$$

d'où l'on conçoit que le facteur cherché est $= x$; car en divisant le numérateur et le dénominateur par x, et mettant ensuite $x = 0$, on obtient la vraie valeur précédemment trouvée.

Dans quelques cas, l'opération se facilite par une substitution convenable, comme on le fera voir dans l'exemple suivant.

Exemple 2. Soit proposée la fonction $\frac{1 - \sin x}{\cos x}$, qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x = \frac{\pi}{2}$, ou que $\sin x = 1$.

D'après le procédé du n° 34, il faudrait mettre $x = \frac{\pi}{2} + h$, et développer ensuite tant le numérateur que le dénominateur, d'après le n° 30, en série suivant h. Mais pour faciliter encore davantage le développement des puissances de h, il est à propos de substituer dans la fonction proposée, z à $\sin x$; par là on trouve

$$\frac{1-z}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette expression étant $\frac{0}{0}$, lorsque $z=1$, il faut mettre (34) $z=1-h$; on obtient ainsi

$$\frac{h}{(2h-h^2)^{\frac{1}{2}}} = (\textit{voyez } \text{n}^{\text{o}}\ 34)\ \frac{h}{h^{\frac{1}{2}}(2-h)^{\frac{1}{2}}},$$

ou, développé d'après le n° 16,

$$= \frac{h}{2^{\frac{1}{2}}.h^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}.h^{\frac{3}{2}} - \ldots};$$

en divisant, d'après le n° 34, le numérateur et le dénominateur par $h^{\frac{1}{2}}$, et mettant ensuite $h=0$, on obtient la vraie valeur $=0$.

Pour obtenir le facteur commun, on observera qu'on a

$$\frac{1-z}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}.(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}.(1+z)^{\frac{1}{2}}};$$

divisant le numérateur et le dénominateur par $(1-z)^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}}{(1+z)^{\frac{1}{2}}},$$

fraction qui ne devient plus $\frac{0}{0}$, dans la supposition de $z=1$, mais qui donne la vraie valeur $=0$, comme nous venons de trouver ci-dessus. Le facteur cherché sera donc

$$(1-z)^{\frac{1}{2}}, \text{ ou } (1-\sin x)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 3. Soit proposée la fonction

$$\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}},$$

qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x = a$. Mettant $x = a + h$, on a

$$\frac{(2ah + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}} = \frac{h^{\frac{3}{2}}(2a + h)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}},$$

(en développant d'après le n° 16)

$$= \frac{(2a)^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(2a)^{\frac{1}{2}} . h^{\frac{5}{2}} + \ldots}{h^{\frac{3}{2}}};$$

divisant le numérateur et le dénominateur par $h^{\frac{3}{2}}$, et mettant ensuite $h = 0$, on obtient la vraie valeur $= (2a)^{\frac{3}{2}}$.

Mettant la fonction proposée sous la forme

$$\frac{(x+a)^{\frac{3}{2}} . (x-a)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}},$$

on voit aisément que le facteur commun est $(x-a)^{\frac{3}{2}}$; car divisant par cette quantité le numérateur et le dénominateur, on obtient $(x+a)^{\frac{3}{2}}$, expression qui donne, lorsque $x = a$, la vraie valeur ci-dessus trouvée $= (2a)^{\frac{3}{2}}$.

36. Une méthode plus commode dans plusieurs cas, pour trouver la vraie valeur, consiste dans la différenciation immédiate du numérateur et du dénominateur de la fraction proposée $\frac{u}{v}$, comme on verra maintenant.

On obtient de $\frac{u}{v}$, en y mettant $x+h$ au lieu de x, d'après le n° 17, l'expression suivante :

$$\frac{u+\frac{du}{dx}.h+\frac{d^2u}{dx^2}.\frac{h^2}{1.2}+\ldots}{v+\frac{dv}{dx}.h+\frac{d^2v}{dx^2}.\frac{h^2}{1.2}+\ldots};$$

par la supposition de $x=a$, u et v s'évanouissent, et l'expression se réduit à

$$\frac{\frac{du}{dx_{x=a}}.h+\frac{d^2u}{dx^2_{x=a}}.\frac{h^2}{1.2}+\ldots}{\frac{dv}{dx_{x=a}}.h+\frac{d^2v}{dx^2_{x=a}}.\frac{h^2}{1.2}+\ldots};$$

où on a joint à tous les coefficiens différentiels la notation $x=a$, pour exprimer qu'on y a mis a au lieu de x (comparez n° 16); divisant maintenant le numérateur et le dénominateur par h, et mettant ensuite $h=0$, on obtient la même valeur qui résulte de $\frac{u}{v}$, dans la supposition de $x=a$, savoir :

$$\frac{\frac{du}{dx_{x=a}}}{\frac{dv}{dx_{x=a}}}=\frac{du_{x=a}}{dv_{x=a}},$$

qui est par conséquent la vraie valeur de la fonction $\frac{u}{v}$.

La règle qu'on établira d'après cela, pour trouver la vraie valeur des fractions qui deviennent $\frac{0}{0}$, dans le cas où $x=a$, sera donc : « Il faut prendre séparément le coefficient différentiel du numérateur et du dénominateur, et faire ensuite dans cette nouvelle fraction $x=a$. »

Si $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dv}{dx}$ s'évanouissent avec u et v dans le cas où $x=a$, on obtiendrait

$$\frac{\frac{d^2u}{dx^2}_{x=a}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}_{x=a}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots}{\frac{d^2v}{dx^2}_{x=a}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3v}{dx^3}_{x=a}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots};$$

divisant maintenant le numérateur et le dénominateur par h^2, et mettant ensuite $h=0$, on obtient pour la vraie valeur

$$\frac{d^2u}{dx^2}_{x=a}:\frac{d^2v}{dx^2}_{x=a}.$$

On conclura de là aisément quel procédé il faudra suivre au cas qu'avec u et v s'anéantisse en même temps un nombre quelconque de coefficiens différentiels.

Nous appliquerons sur-le-champ la méthode ici enseignée aux fractions traitées déjà dans le numéro précédent.

(1). On a dans la fraction $\frac{m.\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{a}\right)}{x}$ qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=0$ (n° 28),

$$\frac{dv}{dx}=\frac{m}{a}:\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{m}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et

$$\frac{dv}{dx}=1,$$

donc

$$\frac{du}{dv}=\frac{m}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

en y mettant $x = 0$, on obtient la vraie valeur $= \frac{m}{a}$.

(2). De la fonction $\frac{1 - \sin x}{\cos x}$ on tire (n° 27)

$$\frac{du}{dx} = -\cos x, \quad \frac{dv}{dx} = -\sin x;$$

donc

$$\frac{du}{dv} = \frac{-\cos x}{-\sin x};$$

faisant ici $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve la vraie valeur $= 0$.

(3). Dans le cas que le facteur commun soit une quantité irrationnelle, la méthode de la différenciation ne se peut pas employer. Nous avons déjà vu (n° 23) que, lorsque $x = a$, les coefficiens différentiels de la fonction $(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}$ deviennent en partie $= 0$, en partie $= \infty$. Si le numérateur, aussi bien que le dénominateur, se compose d'un tel radical, les quotiens $\frac{du}{dv}$, $\frac{d^2u}{d^2v}$, etc., deviennent, dans la supposition de $x = a$, ou $\frac{0}{0}$, ou $\frac{1}{0} : \frac{1}{0}$, expressions égales entre elles, $\frac{1}{0} : \frac{1}{0}$ se réduisant à $\frac{0}{0}$. C'est ainsi qu'on a, dans la fonction $\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x - a)^{\frac{3}{2}}}$ traitée dans le numéro précédent,

$$\frac{du}{dv} = \frac{3x(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}(x - a)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d^2u}{d^2v} = \frac{3(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + 3x^2(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(x - a)^{-\frac{1}{2}}},$$

qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x = 1$. On obtient, d'après le n° 36 (*voy.* n° 34, et comparez n° 35, exemple 3), la vraie valeur $= \frac{-4\sqrt{2}}{3}$. Pour trouver le facteur qui est $= (1 - x)^{\frac{1}{2}}$, il faut mettre arc $(\cos = x) = t$, d'où $x = \cos t$.

Des Maxima *et* Minima *d'une fonction.*

38. Si l'on met dans une fonction de x, représentée par y, au lieu de x, toutes les valeurs possibles consécutives, y lui-même reçoit une valeur différente pour chacune des valeurs respectives de x. Les valeurs de y qui sont plus grandes que celles qui les précèdent ou qui les suivent immédiatement (c'est-à-dire qui sont aussi près d'entre elles que l'on voudra), s'appellent *maxima* de la fonction y, et les valeurs de y qui sont moindres que celles qui les précèdent et les suivent immédiatement, s'appellent *minima* de la fonction y. On s'exprime là-dessus ainsi : « que la fonction y est pour une certaine valeur de la variable indépendante x un *maximum* ou un *minimum*. »

Soit, pour exemple, la fonction $y = a^2 + (x - m)^2$. Si l'on y met m au lieu de x, il vient

$$y = a^2;$$

mais si l'on met $m + c$ ou $m - c$ au lieu de x, où c désigne une quantité quelconque, positive ou négative, aussi petite que l'on voudra, il vient

$$y = a^2 + c^2.$$

Ainsi, puisque les valeurs de x qui précèdent et qui suivent immédiatement celle de $x = m$ rendent la fonc-

tion plus grande, la fonction y est un *minimum* lorsque $x = m$, savoir $= a^2$. On voit de plus que la fonction pour une plus grande valeur de x, pris en sens positif ou négatif, devient plus grande, et qu'il n'existe par conséquent aucune valeur de x pour laquelle y soit le plus grand. La fonction y n'a donc point de *maximum*.

39. Nous montrerons dans la suite comment on fait usage du calcul différentiel pour déterminer le *maximum* et le *minimum* d'une fonction proposée. Mais il nous faudra d'abord intercaler la considération suivante.

Soit donnée la série

$$ax + bx^2 + \ldots + ux^m;$$

elle sera, comme on sait, convergente, c'est-à-dire chaque terme consécutif sera moindre que le précédent, quand $x < 1$. Mais on prétend en outre que, si l'on assigne à x une assez petite valeur, le premier terme de la série, savoir ax, peut devenir plus considérable que la somme de tous les termes consécutifs, quelque grand que soit leur nombre. Nous prouverons la justesse de cette proposition en cherchant à déterminer la valeur de x pour laquelle elle aura lieu.

Il faut donc que l'on ait

$$ax > bx^2 + cx^3 + \ldots + ux^m,$$

ou

$$a > x(b + cx + \ldots + ux^{m-2}).$$

Soit dans la série

$$b + cx + \ldots + ux^{m-2},$$

s le plus grand des coefficiens; la quantité x aura donc la valeur demandée lorsqu'elle sera déterminée en sorte que l'on ait

$$a > x(s + sx + \ldots sx^{m-2}),$$

ou

$$a > sx(1 + x + \ldots + x^{m-2}),$$

ou encore

$$a > sx\left(\frac{x^{m-1} - 1}{x - 1}\right).$$

x étant évidemment < 1, d'après ce qui a été dit, nous désignerons sa valeur par $\frac{1}{p}$, où $p > 1$; il faut donc déterminer p, de manière qu'on ait

$$\frac{\left(\frac{1}{p^{m-1}} - 1\right)}{\frac{1}{p} - 1} \quad \text{ou} \quad a > \frac{s}{p^{m-1}}\left(\frac{1 - p^{m-1}}{1 - p}\right),$$

ou encore

$$ap^{m-1} > s\left(\frac{p^{m-1} - 1}{p - 1}\right),$$

c'est-à-dire

$$ap^{m-1} > \frac{sp^{m-1}}{p - 1} - \frac{s}{p - 1},$$

mais pour cela on n'a qu'à faire

$$ap^{m-1} = \frac{sp^{m-1}}{p - 1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a = \frac{s}{p - 1},$$

d'où

$$p = \frac{s + a}{a};$$

la valeur cherchée de x est donc $= \frac{a}{s + a}$. En substituant cette valeur au lieu de x dans la série

$$ax + bx^2 + \ldots + ux^m,$$

le terme ax sera plus grand que la somme de tous les termes consécutifs.

D'après cela, il sera aussi aisé de déterminer la valeur de x, en sorte qu'un terme quelconque de la série proposée devienne plus grand que la somme de tous les termes consécutifs. Si l'on se proposait, par exemple, de rendre le terme px^n plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent, on n'a, d'après le précédent, qu'à faire $x = \frac{p}{p+s}$, où s désigne le plus grand coefficient de tous ceux qui suivent p.

40. En mettant dans une fonction de x, représentée par y, au lieu de x, successivement $x+h$ et $x-h$, et désignant les valeurs correspondantes de y par $y_{,}$ et $_{,}y$, on obtient, par le théorème de Taylor (17),

$$y_{,} = y + p.\frac{h}{1} + q.\frac{h^2}{1.2} + r.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$_{,}y = y - p.\frac{h}{1} + q.\frac{h^2}{1.2} - r.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Mettant de plus dans ces deux expressions, au lieu de x, une valeur représentée par a, pour laquelle p devient $= 0$, et en désignant les valeurs de $y_{,}$, $_{,}y$, p, q, r... changées par la supposition de $x = a$, par

$y_{,x=a}$, $_{,}y_{x=a}$, $y_{x=a}$, $p_{x=a}$, $q_{x=a}$, $r_{x=a}$... (*voy.* n° 16),

ou pour abréger par $y_{,}'$, $_{,}y'$, y', p', q', r'..., on obtient

$$y_{,}' = y' + q'.\frac{h^2}{1.2} + r'.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$_{,}y' = y' + q'.\frac{h^2}{1.2} - r'.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Si l'on fait h si petite que $q'.\frac{h^2}{1.2}$ est plus grand que la somme de tous les termes consécutifs (39), et que l'on suppose q' positif, l'expression

$$q'.\frac{h^2}{1.2}+r'.\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots,$$

sera positive aussi bien que

$$q'.\frac{h^2}{1.2}-r'.\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots;$$

$y_{,}'$ ainsi que $_{,}y'$ sera donc plus grand que y', c'est-à-dire que $y'=y_{x=a}$ sera plus petit que la valeur qui le précède et qui le suit immédiatement, ou (38) y sera un *minimum* lorsque $x=a$. Si l'on met au contraire, dans la même supposition pour la valeur de h, q' négatif, $y_{,}'$ ainsi que $_{,}y'$ sera plus petit que y', ou (38) y sera un *maximum* quand $x=a$. La condition sous laquelle y deviendra un *minimum* est donc qu'on suppose, au lieu de x, une valeur $=a$ qui fasse évanouir p et qui rende q positif; et la condition sous laquelle y deviendra un *maximum* est qu'on suppose, au lieu de x, une valeur $=a$ qui fasse évanouir p et qui rende q négatif. Donc, pour examiner dans une fonction proposée y, si elle est un *maximum* ou *minimum*, et pour quelle valeur de x cela a lieu, il faut rendre $p=0$, et déterminer x par cette équation. Si q devient positif pour la valeur trouvée de x, que nous désignerons par a, y est un *minimum* pour $x=a$; si q devient au contraire négatif par cette supposition, y est un *maximum* pour $x=a$.

41. On conçoit aisément qu'il faut examiner en particulier pour chaque valeur réelle de x que l'on tire de l'équation $p=0$, le signe dont q est affecté, et qu'on ne doit négliger que les valeurs imaginaires de x dans l'équation $p=0$; il en résulte en même temps qu'une fonction peut avoir plusieurs *maxima* et *minima*.

Si q ne contient pas x, ce qui aura lieu dans le cas où l'équation $p=0$ ne renferme x qu'en première puissance,

q indique immédiatement par son signe, si la fonction est un *maximum* ou un *minimum*.

Quelques exemples éclairciront ce qui a été dit. Soit

$$(1) \quad y = \frac{x^3}{3} + ax^2 - 3a^2x,$$

d'où

$$p = x^2 + 2ax - 3a^2, \text{ et } q = 2x + 2a.$$

On a donc

$$p = 0 = x^2 + 2ax - 3a^2,$$

d'où

$$x = -a \pm 2a,$$

c'est-à-dire que x a les deux valeurs $+a$ et $-3a$; de là on trouve les deux valeurs de q

$$+4a \quad \text{et} \quad -4a.$$

Donc la fonction proposée est pour $x = +a$ un *minimum*, et pour $x = -3a$ un *maximum*. La valeur du *minimum* est (comme on trouve aisément par la substitution de la valeur de x dans la fonction proposée) $= -\frac{5}{3}a^3$, et celle du *maximum* est $= +9a^3$.

(2). Soit $y = 2x^4 + a^3x$,

d'où

$$p = 8x^3 + a^3, \quad q = 24x^2.$$

De $p = 0$, on tire les valeurs $x = -\frac{a}{2}$, et $x = \frac{a}{4}(1 \pm \sqrt{-3})$. Les deux dernières valeurs étant imaginaires, il ne faut considérer que la première, par laquelle q devient $= 6a^2$. Donc la fonction proposée est un *minimum* pour $x = -\frac{a}{2}$. La valeur du *minimum* est $= \frac{-3a^4}{8}$.

(3). Soit proposée la fonction déjà considérée n° 38

$$y = a^2 + (x - m)^2,$$

d'où

$$p = 2(x - m), \quad q = 2.$$

Pour la valeur de $x = m$, qu'on déduit de $p = 0$, la fonction est un *minimum*, ce qui résulte immédiatement du signe positif dont q est affecté.

42. Si pour $x = a$, non-seulement p, mais aussi q, s'anéantissent, les deux séries du n° 40 se changent en les suivantes :

$$y_{,}' = y' + r'.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$_{,}y' = y' - r'.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Si l'on rend ici l'expression $r'.\frac{h^3}{1.2.3}$ par une diminution assez suffisante de h plus grande que la somme de tous les termes consécutifs (39), elle rendra, à cause des signes opposés dont elle est affectée dans l'une et dans l'autre série, $y_{,}'$ plus grand et $_{,}y'$ moindre que y'. La fonction ne sera par conséquent ni *maximum* ni *minimum* dans le cas où pour $x = a$, p et q s'anéantissent. Mais si au contraire, dans la supposition de $x = a$, outre p et q, aussi r devient égal à zéro, circonstance où l'on aura

$$y_{,}' = y' + s'.\frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

$$_{,}y' = y' + s'.\frac{h^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

y sera un *maximum* ou un *minimum*, selon que s pour $x = a$ sera négative ou positive.

En général : désignons par $\frac{d^m y}{dx^m}$ le premier des coefficiens différentiels de la fonction y qui, sous la supposition de $x = a$, ne s'évanouissent pas; la fonction y ne sera, pour $x = a$, ni un *maximum* ni un *minimum* quand m est un nombre impair; mais elle sera un *maximum* ou un *minimum* quand m est un nombre pair, savoir : un *maximum*, si $\frac{d^m y}{dx^m}$ devient négatif pour $x = a$, et un *minimum*, si $\frac{d^m y}{dx^m}$ devient positif pour $x = a$.

Considérons pour exemple la fonction

$$y = (x - a)^n,$$

où n est un nombre positif et entier. On a

$$p = n(x - a)^{n-1}, \quad q = n(n - 1)\ (x - a)^{n-2}, \quad \text{etc.},$$

jusqu'à

$$\frac{d^n y}{dx^n} = n(n - 1)\ldots(x - a)^{n-n} = n(n - 1)\ (n - 2)\ldots 1.$$

De $p = 0$, on tire $x = a$; pour cette valeur de x tous les coefficiens différentiels successifs s'évanouissent jusqu'à celui de l'ordre n: la fonction proposée peut donc, d'après ce que nous venons de dire, être un *maximum* ou un *minimum*, si n est un nombre pair; et elle n'est qu'un *minimum*, parce que le premier des coefficiens différentiels qui ne s'évanouissent pas est $= n\,(n - 1)\ldots 1$, donc positif.

43. Considérons maintenant quelques problèmes sur les *maxima* et *minima*.

Problème premier. Un nombre donné m doit être partagé en deux parties, de manière que le produit des deux parties soit un *maximum*.

Il est avant tout nécessaire, dans ce problème comme dans les suivans, que l'on détermine l'indépendante x, et

la fonction y. Soit x l'une des deux parties, et y le produit des deux parties qui doit être susceptible d'un *maximum* et qui dépend de x. Or, si l'une des deux parties est $= x$, l'autre est $= m - x$; donc, selon le problème,

$$y = x(m - x).$$

On en tire

$$p = m - 2x, \quad q = -2;$$

la valeur de $x = \frac{m}{2}$, tirée de l'équation $p = 0$, donne par conséquent un *maximum*, à cause du signe négatif de q (41).

La solution du problème proposé consiste donc en ce qu'on partage le nombre donné m en deux parties égales.

On voit aisément que ce problème renferme encore celui-ci : « On se propose de partager une ligne droite donnée en deux parties, de sorte qu'on en puisse décrire un rectangle dont l'aire soit un *maximum*. » La solution conduit à un quarré dont l'aire sera en effet la plus grande parmi tous les rectangles d'un même périmètre.

Problème deuxième. Au dedans d'un angle BAC (fig. 6) dont le sinus soit $= \alpha$, est donné un point O; on se propose de mener par O une ligne droite aux deux côtés de l'angle, de manière que le triangle formé soit un *minimum*.

La position de O étant donnée, on peut regarder les lignes OB, OC, menées par le point O, parallèles aux deux côtés de l'angle, comme données; nous les désignerons par a et b. Que l'on mène maintenant par O la ligne DE, en supposant qu'elle réponde à la condition demandée, savoir d'être, parmi toutes les lignes menées par O, celle qui renferme le moindre triangle DAE.

Que l'on fasse DB $= x$, donc

$$x : a = x + b : \text{AE}, \quad \text{ou} \quad \text{AE} = \frac{a(b + x)}{x};$$

la perpendiculaire menée de D à AE est $= a(b + x)$; donc le triangle

$$\text{DAE} = \frac{ax(b + x)^2}{2x}.$$

Or, le triangle étant la fonction qui soit susceptible d'un *minimum*, nous le désignerons par y. On a ainsi

$$y = \frac{ax(b + x)^2}{2x},$$

d'où

$$p = \frac{ax(x^2 - b^2)}{2x^2}, \quad q = \frac{ab^2}{x^3}.$$

De $p = 0$ on tire $x = \pm b$.

La première valeur $x = +b$ rend q positif, et indique par conséquent un *minimum* dont la valeur est $= 2ab$, c'est-à-dire le double du parallélogramme ABOC. Pour la construction de ce triangle cherché, il faut faire $\text{BD} = \text{AB} = b$, et mener ensuite du point D, qui sera par là déterminé, une ligne droite par O.

L'autre valeur $x = -b$ rend q négatif, et indique ainsi un *maximum*. Or, il est visible que le triangle ne peut être un *maximum*; car si x diminue, le triangle augmente de plus en plus et s'accroît sans cesse, comme on voit clairement par l'inspection de la figure (comparez n° 38): donc $x = -b$ ne peut indiquer un triangle qui soit le plus grand. Néanmoins il est certain (d'après n° 40) que la valeur de la fonction $y = \frac{ax(b + x)^2}{2x}$ répond à un *maximum* si on la regarde en elle-même ou algébriquement, c'est-à-dire sans rapport au problème proposé. Pour éclaircir tout cela davantage, il serait à propos de construire, comme on le fait souvent, la fonction géométriquement, c'est-à-dire en courbe (où l'on regarderait x et y

comme des coordonnées). On obtiendrait ainsi une hyperbole où les points $x = \pm b$ indiqueraient évidemment la plus petite ordonnée positive et la plus petite ordonnée négative, c'est-à-dire des ordonnées dont l'une serait un *maximum*, l'autre un *minimum*.

On en voit que $x = -b$ donne en effet un *maximum* de la fonction regardée en elle-même, mais pas une solution pour le problème proposé. C'est donc ici le même cas, comme dans des problèmes qui conduisent à certaines équations, où quelques valeurs répondent bien aux équations, mais pas à la solution du problème proposé.

On trouvera aisément la détermination particulière que prend la solution, si l'angle donné est un angle droit, où $\alpha = 1$, et aussi lorsque le point O est pris au milieu de l'angle où $a = b$.

Problème troisième. Soit donné entre les côtés d'un angle droit DAE (fig. 7) le point O, de manière que $OB = a$, et $OC = b$; on se propose de trouver la plus petite ligne que l'on puisse mener par O aux deux côtés de l'angle.

On a $DB = x$; par là $CE = \frac{a.b}{x}$; la ligne DE, supposée susceptible d'un *minimum*, sera $= y$. On a donc

$$y = \left(1 + \frac{b}{x}\right)(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$p = \frac{x^3 - ba^2}{x^2(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

il vient donc $x = (ba^2)^{\frac{1}{3}}$; les deux autres valeurs étant imaginaires, seront pour cela négligées (41). Lorsque $x = (ba^2)^{\frac{1}{3}}$, on aura

$$q = \frac{3}{a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}.$$

Le radical $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ dans la fonction y étant pris positivement (puisqu'on a considéré seulement sa valeur absolue qui est toujours positive), q devient aussi positif; $x = (ba^2)^{\frac{1}{3}}$ n'indique par conséquent qu'un *minimum* dont la valeur est $= (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$; (pris aussi en sens absolu, donc positif).

Si dans le problème $a = b$, la plus petite ligne est $= a.2^{\frac{3}{2}}$.

44. Voici encore quelques problèmes sur les *maxima* et *minima*, pour la solution desquels on ne donnera que quelques renseignemens.

Problème 4. Soit proposé d'inscrire à un cercle dont le rayon $= r$, le rectangle dont l'aire soit un *maximum*.

En entendant ici par x la perpendiculaire abaissée du centre sur la corde, c'est-à-dire sur le côté du rectangle, on aura

$$y = 4x\,(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient pour le *maximum* $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ (valeur qui ne se peut prendre qu'en sens positif; *voy.* le problème 3 du n° 43).

Le rectangle cherché est donc un quarré.

Problème 5. Soit proposé d'inscrire à un cercle dont le rayon $= r$, le plus grand triangle isocèle.

En entendant ici par x la perpendiculaire abaissée du centre sur la base, on aura

$$y = (r + x).(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Le triangle cherché est donc un triangle équilatéral.

Problème 6. On se propose de trouver dans la ligne PQ (fig. 8) le point O, placé de manière que la somme de ses distances de deux points donnés M et N, pris hors de la ligne, soit un *minimum*.

Qu'on mène de M et N les perpendiculaires MP et NQ, et qu'on les désigne par a et b; soit $PQ = c$. Qu'il soit de plus $OP = x$; on obtient ainsi

$$y = MO + NO = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + [b^2 + (c - x)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

De $p = 0$, on tirera deux valeurs pour x, savoir: $x = \frac{ac}{b + a}$, et $x = \frac{-ac}{b - a}$, qui, toutes deux, rendant q positif, indiquent deux *minima*. Mais on se convaincra aisément par la construction géométrique qu'il n'y aura qu'un seul *minimum*. Qu'on prolonge pour cela NQ par Q jusqu'à ce que $QN' = QN$, et qu'on mène MN'. Le point d'intersection O sera le point cherché, puisque la somme

$$MO + N'O = MO + NO$$

est moindre que la somme de deux autres lignes quelconques, par exemple, de $MO' + N'O' = MO' + NO'$. En cherchant au moyen des triangles semblables MPO et N'OQ la valeur de PO, on obtient pour elle la première valeur de x, que nous avons trouvée auparavant. La première valeur de x passe en effet à l'autre $\frac{-ac}{b - a}$, si l'on prend a en sens négatif, c'est-à-dire que les deux points M et N se trouvent aux côtés opposés de la ligne PQ.

Quelle sera la valeur du *minimum*? et quelles déterminations particulières subit la solution lorsque $a = b$?

Problème 7. On cherche de tous les cônes droits, dont la surface $= m^2$, celui dont le volume soit un *maximum*.

Soit le rayon de la base $= x$ et la hauteur du cône $= z$,

on aura

$$m^2 = x\pi(z^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2\pi,$$

par où on déterminera d'abord z. On obtient ensuite

$$y = \frac{mx}{3}(m^2 - 2\pi x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour le cône cherché, on aura

$$x : z = 1 : 2\sqrt{2};$$

mais en entendant par m^2 seulement la surface courbe du cône, on aura

$$x : z = 1 : \sqrt{2}.$$

La proposition du problème se conçoit aussi en ces termes : « Lequel de tous les cônes droits d'un volume donné aura la moindre surface? »

De la même manière que ce problème, se traiteront les trois suivans.

Problème 8. On cherche, parmi tous les cylindres droits dont la surface $= m^2$, celui dont le volume soit un *maximum*.

Soit le rayon de la base $= x$, et la hauteur $= z$; on aura

$$m^2 = 2\pi xz + 2\pi x^2,$$

par où on déterminera z; on obtient ensuite

$$y = \frac{m^2x}{2} - x^3\pi.$$

On trouvera que la hauteur du plus grand cylindre cherché sera le double de son rayon.

Mais si l'on ne donne au cylindre qu'une seule base, la hauteur sera égale à son rayon.

Problème 9. On cherche de tous les prismes perpendiculaires, dont la surface est $= m^2$, et la base un polygone régulier d'un nombre donné de côtés, celui qui aura le plus grand volume.

En entendant par x l'un des côtés de la base, par n le nombre de ses côtés, par z la hauteur du prisme, et notant de plus tang $\frac{180^\circ}{n}$ par t, on aura

$$\frac{nx^2}{2t} + nxz = m^2,$$

et

$$\frac{nx^2z}{4t} = y.$$

Après l'élimination de z, on obtient

$$y = \frac{m^2x}{4t} - \frac{nx^3}{8t^2}.$$

Quel sera le rapport de x à z pour le prisme cherché? — Quel changement subira la solution si l'on ne considère qu'une seule des deux bases? — Appliquez les formules générales au cas où la base serait un triangle régulier, un quarré, un hexagone, etc. — Au lieu du côté de la base, on pourrait introduire comme la variable indépendante le rayon du cercle circonscrit à la base.

Problème 10. On cherche de toutes les pyramides perpendiculaires dont la surface est $= m^2$, et dont la base est un polygone régulier d'un nombre donné de côtés, celle qui aura le plus grand volume.

Problème 11. Soit proposé de couper une portion d'un cercle donné, et de former du reste un cône; combien de degrés comprendra l'arc du segment qu'il faut ôter, pour que le volume du cône soit un *maximum?*

Application du calcul différentiel à la Géométrie.

45. Nous avons vu dans le n° 25 que, dans les fig. 1, 2, 3, 4, M'Q est $= p.\Delta x$, savoir : $= +p.\Delta x$ dans les fig. 1 et 2, et $= -p.\Delta x$ dans les fig. 3 et 4.

MQ étant $= \Delta x$ (25), il en résulte que

$$\text{tang M'MQ} = \text{tang MBP} = p,$$

c'est-à-dire que la tangente trigonométrique de l'angle MBP, compris entre la tangente MB d'une courbe et l'axe des abscisses, est égale à $p = \frac{dy}{dx}$, savoir : $= +p$, dans les fig. 1 et 2, où des deux angles adjacens autour de B, l'angle aigu MBP, est tourné vers le côté positif des abscisses ; et $= -p$, dans les fig. 3 et 4, où l'angle aigu MBP est tourné vers le côté négatif des abscisses.

Or, cet angle varie avec le point de contact ; en désignant les coordonnées d'un certain point de contact par x' et y', il faudra dans $\frac{dy}{dx}$ mettre x' et y' au lieu de x et y, pour obtenir la tangente trigonométrique pour ce point de contact déterminé, laquelle sera exprimée alors par $\frac{dy'}{dx'}$ ou p'.

Mais on observera que de ces deux quantités x' et y', x' seulement pourra être pris à volonté, et qu'il faudra chercher par l'équation primitive de la courbe la valeur correspondante de y'.

Pour éclaircir ce qui précède, soit proposé de chercher la tangente trigonométrique du cercle pour les coordonnées du point de contact x' et y'.

L'équation du cercle rapportée au centre étant.....

$y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, il en résulte que $y' = (r^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}}$; étant de plus $p = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, la tangente trigonométrique cherchée sera $= \frac{-x'}{y'} = \frac{-x'}{(r^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}}}$. En prenant....

$y' = (r^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}}$ positivement, c'est-à-dire en considérant la partie du cercle au-dessus du diamètre, où les ordonnées sont positives (25), on verra par le signe de l'expression précédente, de quel côté de l'origine des coordonnées la tangente rencontrera l'axe des abscisses; savoir : x' étant positif, la tangente rencontrera l'axe des abscisses du côté positif des abscisses, comme dans les fig. 3 et 4; mais x' étant négatif, comme dans les fig. 1 et 2, elle la rencontrera du côté négatif.

Réciproquement, lorsqu'on demande dans une courbe donnée le point de contact où la tangente renferme avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique est $= a$, il faut déterminer les coordonnées du point de contact x' et y' par l'équation $\frac{dy'}{dx'} = a$, conjointement avec l'équation donnée de la courbe. Supposé, par exemple, que la tangente au cercle comprenne avec l'axe des abscisses un angle $= 60°$, dont la tangente trigonométrique est $= \pm 3^{\frac{1}{2}}$, on aura les deux équations

$$y' = (r^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ et } \frac{dy'}{dx'} = \frac{-x'}{y'} = \pm 3^{\frac{1}{2}};$$

il en résulte que

$$x' = \frac{r}{2} . \pm 3^{\frac{1}{2}}, \text{ et } y' = + \frac{r}{2} \text{ (si } y' \text{ se prend positivement).}$$

Si l'on fait $\frac{dy'}{dx'} = 0$, on parvient aux coordonnées du

point de contact, où la tangente comprend avec l'axe des abscisses un angle $= 0$, où la tangente est par conséquent parallèle à l'axe des abscisses.

Si l'on fait au contraire $\frac{dy'}{dx'} = \infty$ (condition à laquelle on satisfait en égalant à zéro le dénominateur dans la valeur de $\frac{dy'}{dx'}$), l'angle correspondant est $= 90°$, c'est-à-dire que la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses. Pour le cercle dont l'équation $y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, il vient pour $\frac{dy'}{dx'} = \infty$

$$x' = \pm r \quad \text{et} \quad y' = 0.$$

Or, $\frac{dy'}{dx'} = 0$ indique un *maximum* ou un *minimum* (n° 40); donc, puisque de $\frac{dy'}{dx'} = \infty = \frac{1}{0}$, il résulte que $\frac{dx'}{dy'} = 0$ (9), la valeur de $\frac{dy'}{dx'} = \infty$ indique un *maximum* ou un *minimum*, mais par rapport à l'abscisse x'. L'inspection d'une figure, par exemple du cercle, fera voir clairement l'exactitude de ces deux propositions.

46. Au moyen de ce qui précède, nous trouverons aisément la *sous-tangente* BP (fig. 1, 2, 3, 4). On a dans le triangle MPB

$$BP = MP : \text{tang } MBP = y' : \frac{dy'}{dx'} \ (45) = y' \cdot \frac{dx'}{dy'} \ (9).$$

Or, d'après le n° 45, $\frac{dy'}{dx'}$ étant positif dans les fig. 1 et 2, et étant négatif dans les fig. 3 et 4, l'expression pour la sous-tangente BP sera aussi positive dans les fig. 1 et 2, et elle sera négative dans les fig. 3 et 4.

D'après cela, on déterminera aisément la position de la

sous-tangente par le signe dont son expression sera affectée.

Pour la *sous-normale* PR, on trouve aisément par les triangles rectangles BMR et PMR (fig. 1, 2, 3 et 4) qu'elle est égale à

$$y'^2 : \mathrm{PB} = y'^2 : y' \cdot \frac{dx'}{dy'} = y' \cdot \frac{dy'}{dx'}.$$

Sa position s'apprend aussi, comme celle de la sous-tangente, par le signe de son expression.

Il est aisé de déduire des valeurs de la sous-tangente et de la sous-normale, la longueur de la tangente MB et celle de la normale MR. Pour la première on obtient

$$y' \cdot \left(1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et pour la dernière

$$y' \cdot \left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

47. Il sera bon, pour les considérations suivantes, de rappeler au lecteur, en peu de mots, quelques propositions des élémens de la Géométrie analytique, concernant l'équation de la ligne droite.

L'équation la plus générale de la ligne droite est

$$y = ax + b,$$

où x et y désignent les coordonnées, et a et b des quantités constantes (quoique indéterminées) en sorte que b indique l'ordonnée à l'origine des coordonnées, et que a représente la tangente trigonométrique de l'angle compris entre la ligne droite et l'axe des abscisses, supposé que l'on ait adopté des coordonnées rectangulaires, comme cela se fait ordinairement. Quant au signe de a, il sera positif lorsque des deux angles formés par la ligne et l'axe des abscisses, celui qui est aigu se tourne vers le côté des abscisses positives;

ce qui a lieu pour la tangente BM, qui doit ici représenter la ligne droite en général, dans les fig. 1 et 2, où l'angle MBP $<$ R (25).

Au contraire, a sera négatif lorsque des deux angles, celui qui est obtus se tourne vers le côté des abscisses positives, ce qui a lieu pour la tangente BM dans les fig. 3 et 4. De plus, pour la tangente BM, le point d'intersection B se trouve dans les fig. 1 et 2 du côté négatif, et dans les fig. 3 et 4 du côté positif de l'origine A; donc l'ordonnée à l'origine est positive dans toutes les quatre figures, puisque les ordonnées se prennent en sens positif au-dessus de l'axe des abscisses (25). Dans le cas contraire, l'ordonnée à l'origine, ou b dans l'équation générale de la ligne droite, est négative. D'après cela, le lecteur pourra sans peine projeter les quatre formes suivantes :

$$(1)\quad y = +ax + b, \qquad (2)\quad y = +ax - b,$$
$$(3)\quad y = -ax + b, \qquad (4)\quad y = -ax - b.$$

Si l'on donne à la droite des déterminations particulières, l'équation même de la ligne se particularise par cela. Considérons maintenant quelques-unes de ces déterminations.

Soit proposé de trouver l'équation d'une ligne droite qui, renfermant avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique $= a'$, passe par un point dont les coordonnées sont α et β.

On aura alors, outre l'équation générale $y = ax + b$, encore pour le point donné

$$\beta = a\alpha + b;$$

en chassant b des deux équations, on obtient

$$y - \beta = a\,(x - \alpha).$$

De plus, à cause de l'angle donné, on a pour l'équation cherchée

$$y - \beta = a'(x - \alpha) \Big| \; y = a'x - a'\alpha + \beta$$

Cette équation pourra encore s'exprimer par

$$y = a'x + \beta - a'\alpha,$$

et l'on voit que la lettre b de l'équation générale est représentée par l'expression

$$\beta - a'\alpha,$$

le signe de laquelle reste encore à chercher, pour déterminer la figure correspondante de la ligne selon les quatre formes particulières ci-dessus rapportées.

D'une manière semblable on parvient pour la ligne droite qui passe par deux points dont les coordonnées sont α, β, et α', β', à l'équation suivante :

$$\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x - \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\alpha + \beta \quad y - \beta = \left(\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\right) . (x - \alpha).$$

Enfin, soit proposé de trouver l'équation de la ligne droite perpendiculaire sur une autre dont l'équation

$$y = a'x + b'.$$

La ligne cherchée formera, à cause de sa perpendicularité avec l'axe des abscisses, un angle dont la tangente trigonométrique $= \frac{1}{a'}$, parce que les deux angles formés par la ligne cherchée et la ligne donnée avec le même axe des abscisses se suppléent mutuellement pour faire un angle droit. De plus, la position de la ligne cherchée appartenant aux deux dernières des quatre formes ci-dessus, on a pour l'équation demandée

$$y = -\frac{1}{a'} \cdot x + b.$$

Si la ligne cherchée doit en outre passer par un point dont les coordonnées sont α et β, on a pour son équation

$$y - \beta = -\frac{1}{a'}(x - \alpha)$$

48. D'après cela, il est aisé de trouver les équations de la tangente et de la normale pour une courbe quelconque.

La tangente passant par un point dont les coordonnées sont x', y', et renfermant avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique $= \frac{dy'}{dx'}$ (45), a pour équation (47)

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} \cdot (x - x').$$

De plus, la normale étant perpendiculaire à la tangente et passant par un point dont les coordonnées sont x', y', a pour équation (47)

$$y - y' = -\frac{dx'}{dy'} \cdot (x - x').$$

Exemple. Pour le cercle dont l'équation $y^2 + x^2 = r^2$, on a, comme nous avons déjà montré n° 45,

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{-x'}{y'},$$

d'où l'équation de la tangente

$$y - y' = \frac{-x'(x - x')}{y'},$$

ou (l'équation du cercle donnant $y'^2 + x'^2 = r^2$)

$$yy' + xx' = r^2.$$

De plus, on a pour le cercle

$$\frac{-dx'}{dy'} = \frac{y'}{x'};$$

donc, la normale a pour équation

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x') \quad \text{ou} \quad yx' = xy'.$$

L'absence du terme constant dans cette équation fait voir que l'ordonnée à l'origine des coordonnées, qui est ici le centre, est $= 0$ (47), et qu'en conséquence la normale passe par le centre, c'est-à-dire qu'elle est un des rayons.

Problème. Soit donnée l'équation

$$y^2 = 2mx + nx^2,$$

équation générale de toutes les sections du cône rapportée au sommet et à l'axe. On propose de trouver $\frac{dy}{dx}$, et ensuite l'équation de la tangente et de la normale.

49. Reprenons maintenant de nouveau l'expression considérée dans le n° 25,

$$\Delta y = p.\Delta x + \psi.\Delta x^2.$$

Nous avons vu, au numéro cité, que ψ est positif dans les fig. 1 et 3, où la courbe tourne sa convexité vers l'axe des abscisses; négatif dans les fig. 2 et 4, où elle tourne sa concavité vers l'axe des abscisses. Or, on a (17)

$$\psi = \frac{q}{1.2} + \frac{r}{1.2.3}.\Delta x + \frac{s}{1.2.3.4}.\Delta x^2 + \ldots,$$

et, d'après le n° 39, si Δx est pris assez petit, ψ sera positif ou négatif, selon que q est positif ou négatif. On voit par

là que la courbe tournera dans un point sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses, selon que le coefficient différentiel du second ordre q, tiré de l'équation de la courbe, pour la valeur correspondante de l'abscisse x, est positif ou négatif. Il s'ensuit en même temps que pour un *maximum* où $p = 0$ et q négatif (40), la courbe tournera nécessairement sa concavité vers l'axe des abscisses, et que pour un *minimum* où $p = 0$ et q positif, la courbe tournera nécessairement sa convexité vers l'axe des abscisses. L'inspection d'une figure éclaircira cela sans peine.

Il est clair, par le précédent comme par le n° 45, que pour apprendre la position d'une courbe par rapport à l'axe des abscisses dans un point donné, il faut examiner les signes que prennent p et q dans ce point.

Si q change de signe immédiatement avant et après un point donné, on en conclut que la courbe est de l'un des côtés de ce point convexe, et de l'autre concave vers l'axe des abscisses ; un tel point s'appelle *point d'inflexion*. Il est évident que q dans ce point, où son signe passe à l'opposé, sera nul ou infini, la dernière circonstance ayant lieu si q est une fraction dont le dénominateur s'évanouit pour ce point.

D'ailleurs, pour mieux comprendre comment une quantité passe du positif au négatif par l'infini, il sera à propos de se rappeler de la Trigonométrie, que la quantité $\frac{r.\sin x}{\cos x}$ qui exprime la longueur de la tangente d'un angle x, devient infinie lorsque $\cos x = 0$, ou quand la tangente cessant d'être positive, commence à devenir négative.

Mais quand même pour un point d'inflexion q deviendrait, ou $= 0$, ou $= \infty$, la réciproque de la proposition n'a pas nécessairement lieu, et il n'existe pas toutes les fois un point d'inflexion pour $q = 0$, ou $= \infty$; car l'équation d'une courbe représentée fig. 11, qui a, au point A, un

point de rebroussement, doit contenir nécessairement un radical d'un degré pair. C'est ainsi seulement que les ordonnées peuvent devenir imaginaires et que l'existence de la courbe devient impossible de l'un des côtés de ce point. Mais dans les équations de ce genre, les premiers coefficiens différentiels deviennent $= 0$ pour la valeur de x qui fait évanouir le radical, et les coefficiens consécutifs deviennent $= \infty$, comme il a été déjà montré n°s 23 et 26. On observera donc pour cela ce qui suit : si pour une certaine valeur de x, q est $= 0$ ou $= \infty$, il faut examiner l'équation primitive, si elle indique l'existence de la courbe seulement d'un côté de ce point ou de l'un et de l'autre en même temps; ce n'est que dans le dernier cas que le point examiné peut être un point d'inflexion, tandis que dans le premier cas il peut être un point de rebroussement.

Il arrive souvent que pour quelques valeurs de x, pour lesquelles $p = 0$ ou $= \infty$, q devient aussi $= 0$ ou $= \infty$, sans qu'il n'existe ni l'un ni l'autre de ces deux points, ce qui sera examiné dans la suite. C'est pour cette raison et parce que quelques valeurs de x, par lesquelles p ainsi que q deviennent $= 0$ ou $= \infty$, ne correspondent à aucune ordonnée (ce qui se fait voir alors par l'équation primitive) qu'il est absolument nécessaire de considérer conjointement les expressions de y, p et q.

Tout ce qui a été dit dans ce numéro sera éclairci dans la suite par l'analyse de quelques courbes.

50. Considérons maintenant deux courbes dont les équations soient

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad y = \varphi(x).$$

Supposons que ces deux courbes se rencontrent en un point dont les coordonnées sont x' et y', de manière qu'on ait pour ce point

$$y' = f(x') \quad \text{et} \quad y' = \varphi(x').$$

Les coefficiens différentiels, après y avoir substitué x' au lieu de x, soient représentés pour la première courbe par $p', q', r' \ldots$ (45), et pour l'autre courbe par $P', Q', R', \ldots$; désignons de plus la différence des ordonnées, ou Δy, pour la première courbe par k', et pour la seconde par K'. On aura ainsi, par le théorème de Taylor, en mettant $x' + h$ au lieu de x',

$$k' = p'.h + q'.\frac{h^2}{1.2} + r'.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$K' = P'.h + Q'.\frac{h^2}{1.2} + R'.\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

où $p', q', r', \ldots, P', Q', R', \ldots$, ne renferment que x' et des quantités constantes. S'il arrivait maintenant qu'on eût $p' = P'$, les deux courbes ayant un point commun, auront la même tangente à ce point (d'après n° 45), et il sera en même temps

$$k' - K' = (q' - Q').\frac{h^2}{1.2} + (r' - R').\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

expression qui donne la différence des ordonnées des deux courbes ou la distance de ces courbes immédiatement auprès du point de contact, supposé qu'on fasse h assez petite. Cette distance deviendrait encore moindre, savoir égale à

$$(r' - R').\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

si l'on avait en même temps $p' = P'$ et $q' = Q'$. Enfin, on voit aisément que cette distance sera d'autant plus petite, c'est-à-dire que les deux courbes sont d'autant plus près l'une de l'autre, immédiatement auprès du point de con-

tact (donc pour h très petite), que plusieurs des quantités $p' - P'$, $q' - Q'$, $r' - R' \ldots$, s'anéantissent. On exprime cela ainsi : « Que les deux courbes qui passent par un point dont les coordonnées sont x', y', ont un contact du premier ordre si $p' - P' = 0$; un contact du second ordre, si $p' - P' = 0$ et $q' - Q' = 0$; un contact du troisième ordre, si $p' - P' = 0$, $q' - Q' = 0$ et $r' - R' = 0$; et ainsi de suite pour un contact d'un ordre quelconque.

On déduira facilement de ce qui précède le procédé pour procurer à une courbe, dont l'équation est $y = \varphi(x)$, un contact d'un ordre quelconque, par exemple, du nombre n en un point dont les coordonnées sont x', y', avec une courbe déterminée dont l'équation est $y = f(x)$, c'est-à-dire avec une courbe où toutes les quantités constantes sont supposées comme tout-à-fait déterminées. Mettant pour cela dans les n premiers coefficiens différentiels x' au lieu de x, on déterminera ensuite par les n équations

$$p' - P' = 0, \quad q' - Q' = 0 \ldots, \text{ etc.},$$

combinées avec l'équation primitive

$$y' = f(x') = \varphi(x'),$$

$n + 1$ quantités constantes qui entrent dans l'équation $y = \varphi(x)$.

Il faut donc, comme on voit sur-le-champ, que l'équation d'une courbe, pour qu'elle soit susceptible d'un contact du premier ordre, contienne deux quantités constantes, pour un contact du second ordre trois constantes; en général, pour un contact de l'ordre n, $n + 1$ constantes.

Une courbe à qui l'on a donné un contact de l'ordre le plus élevé dont elle soit susceptible, c'est-à-dire que toutes les quantités constantes qui entrent dans son équation soient déterminées de la manière précédemment exposée, s'appelle *courbe osculatrice*.

51. Donnons pour exemple à la ligne droite (car ce qui a lieu pour les courbes en général, doit aussi rester en valeur pour la ligne droite), qui a pour équation

$$y = ax + b,$$

un contact du premier ordre dans un point dont les coordonnées sont x', y', avec la courbe déterminée (50), $y = f(x)$. On a donc

$$\varphi(x') = ax' + b \quad \text{et} \quad P' = \frac{dy'}{dx'} = a.$$

On obtient par là, d'après le numéro précédent, les deux équations

$$f(x') = y' = ax' + b \quad \text{et} \quad a = p' = \frac{dy'}{dx'}.$$

Il en résulte que

$$b = y' - x'.\frac{dy'}{dx'}.$$

L'équation de la ligne droite qui a un contact du premier ordre (50) avec la courbe proposée, dans un point dont les coordonnées sont x' et y', ou l'équation de la droite qui est tangente à cette courbe au point nommé, sera donc

$$y = \frac{dy'}{dx'}.x + y' - x'.\frac{dy'}{dx'}, \text{ ou } y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

comme nous avons trouvé n° 48.

Considérons, pour second exemple, le cercle. Son équation la plus générale est, comme on sait,

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2,$$

où r désigne le rayon, et α, β les coordonnées du centre. Le cercle est, par conséquent, susceptible d'un contact du second ordre, son équation renfermant trois quantités cons-

tantes ; il ne devient donc *cercle osculateur* que par un contact de cet ordre (50). En différenciant deux fois de suite l'équation du cercle, on obtient

$$\frac{dy}{dx}=P=\frac{-(x-\alpha)}{[r^2-(x-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=Q=\frac{-r^2}{[r^2-(x-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

On aura donc, d'après le procédé du numéro précédent,

$$\gamma'-\beta=[r^2-(x'-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}\ldots\ (1),$$

$$p'=\frac{-(x'-\alpha)}{[r^2-(x'-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}}\ldots\ (2),$$

$$q'=\frac{-r^2}{[r^2-(x'-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}\ldots\ (3).$$

Après avoir élevé au quarré les deux membres des équations (2) et (3), et chassé $x'-\alpha$, on obtient sur-le-champ

$$r=\frac{\pm(1+p'^2)^{\frac{3}{2}}}{q'}.$$

L'expression $r=\frac{\pm(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ appartient donc au rayon du cercle osculateur pour chaque point de la courbe proposée, les coordonnées duquel sont x et y.

Le double signe qui se rapporte à la position opposée de deux rayons formant ensemble un diamètre, fait reconnaître que le centre du cercle osculateur et l'axe des abscisses se trouvent, ou du même côté, ou des côtés différens de la courbe. Dans le premier cas, la courbe est concave vers l'axe des abscisses, et q sera négatif (49). Dans le second cas, la courbe est convexe vers l'axe des abscisses, et q sera positif. Donc, si l'on prend toutes les fois $(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$ positif,

r et q seront de même signe. Il est aisé, d'après cela, de déterminer la position du rayon r.

Exemple. Pour la parabole, on a

$$y^2 = mx,$$

d'où
$$p = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad q = \frac{-m^{\frac{3}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}};$$

donc
$$r = \frac{-(4x+m)^{\frac{3}{2}}}{2m^{\frac{1}{2}}},$$

négatif parce que q est négatif.

Problème. Soit proposé de trouver la valeur de r pour la section du cône en général, dont l'équation $y^2 = 2mx + nx^2$, et d'exprimer ensuite cette valeur par la normale.

Quelle valeur aura r, lorsque $x = 0$?

De l'équation (2) on tire

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{-(x'-\alpha)}{[r^2-(x'-\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-(x'-\alpha)}{y'-\beta};$$

d'où l'on déduit

$$y' - \beta = -\frac{dx'}{dy'} \cdot (x' - \alpha),$$

ce qui est, d'après le n° 48, l'équation de la normale qui appartient au point x', y', et qui passe par le point α, β. On conçoit que le cercle osculateur a placé son centre dans la normale menée par le point de contact. Il sera donc aisé de construire le rayon osculateur pour un point déterminé d'une courbe, puisqu'on connaît non-seulement sa longueur, mais aussi la circonstance qu'il se trouve dans la normale du point donné et du côté concave de la courbe.

La courbure du cercle est uniforme dans tous ses points, et en raison inverse de la longueur de son rayon, tandis que la courbure de toute autre courbe est inégale. Mais comme la courbe a dans chaque point presque la même courbure que son cercle osculateur (50), on peut juger de sa courbure dans chaque point par celle du cercle osculateur appartenant; c'est pour cela que le cercle osculateur est nommé *cercle de courbure*, et le rayon osculateur, *rayon de courbure*.

52. En observant qu'à chaque x' et y' correspond un autre α et β, on comprendra qu'il faut nécessairement que les centres forment une courbe continue aussi bien que la courbe proposée. On parvient à l'équation de cette courbe, que nous nommerons *courbe des centres*, par les équations (1), (2), (3) du numéro précédent. En effet, on obtient

$$x' - \alpha = \frac{p'(1 + p'^2)}{q'}, \quad \text{et} \quad y' - \beta = \frac{-(1 + p'^2)}{q'}.$$

En substituant dans ces deux expressions pour y', p' et q' leurs valeurs en x', et éliminant ensuite x', on parvient à l'équation cherchée entre α et β.

Exemple. On se propose de trouver la courbe des centres pour la parabole ordinaire, qui a pour équation $y'^2 = mx'$. On a

$$p' = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{2x'^{\frac{1}{2}}}, \qquad q' = \frac{-m^{\frac{1}{2}}}{4x'^{\frac{3}{2}}};$$

donc

$$1 + p'^2 = \frac{m + 4x'}{4x'}.$$

Il vient par là

$$x' - \alpha = \frac{-(m + 4x')}{2}, \text{ ou } x' = \frac{2\alpha - m}{6} = \frac{\alpha - \frac{m}{2}}{3};$$

on a de plus

$$y' - \beta = m^{\frac{1}{2}} . x'^{\frac{1}{2}} - \beta = \frac{x'^{\frac{1}{2}} (m + 4x')}{m^{\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$mx'^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{1}{2}} . \beta = mx'^{\frac{1}{2}} + 4x'^{\frac{3}{2}},$$

ou

$$4x'^{\frac{3}{2}} = -m^{\frac{1}{2}} \beta, \quad \text{ou enfin} \quad 16x'^3 = m\beta^2;$$

en y substituant la valeur trouvée précédemment de x', on obtient, pour l'équation cherchée,

$$\frac{16\left(\alpha - \frac{m}{2}\right)^3}{27m} = \beta^2;$$

en mettant $\alpha - \frac{m}{2} = \alpha'$, c'est-à-dire en transportant dans la fig. 9 l'origine des abscisses de A à D, en sorte que.... $AD = \frac{m}{2}$, on parvient à l'équation

$$\beta^2 = \frac{16}{27 . m} . \alpha'^3.$$

Dans la courbe représentée fig. 9, la branche DF contient les centres des cercles osculateurs de la branche AK de la parabole BAK.

Analyse de quelques courbes.

53. Nous allons appliquer maintenant à quelques courbes ce qui a été exposé depuis le n° 45 jusqu'ici.

Problème 1. Soit donné un cercle (fig. 10) et son équation rapportée au centre. On se propose de trouver la courbe

dont l'ordonnée soit à l'ordonnée du cercle pour la même abscisse, comme l'abscisse est au rayon.

Désignant l'ordonnée du cercle par z, le rayon par r, on aura

$$z = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}};$$

donc il viendra

$$y : (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = x : r, \quad \text{ou} \quad y^2 : r^2 - x^2 = x^2 : r^2,$$

d'où

$$r^2 y^2 = r^2 x^2 - x^4, \quad \text{ou} \quad y = \frac{(r^2 x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}{r}.$$

Cette équation fait voir que la courbe cherchée coupe le diamètre au centre, parce que, dans ce point, c'est-à-dire pour $x = 0$, y devient $= 0$, ce qui a lieu aussi pour les points A et B, parce que pour $x = \pm r$, y devient $= 0$. De plus, la courbe est fermée aux points A et B, et elle ne s'étend pas au-delà de ces points, parce que pour $x > \pm r$, y devient imaginaire; elle est tout-à-fait symétrique au-dessus et au-dessous du diamètre AB, ce qui se fait reconnaître par la deuxième puissance de y, en sorte que le radical $\frac{(r^2 x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}{r}$, pris en sens positif, correspond à la partie de la courbe au-dessus du diamètre, et le radical pris en sens négatif, à la partie au-dessous du diamètre (25). La même symétrie de la courbe par rapport au diamètre CD se fait voir de même par les puissances paires de x; d'où il s'ensuit que le centre O, et les diamètres AB et CD du cercle sont également le centre et les diamètres de la courbe cherchée.

Par la différenciation, on obtient

$$p = \frac{r^2 - 2x^2}{r.(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

par-où l'on reconnaît la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente de la courbe renferme avec le diamètre (savoir pour chaque point, supposé qu'on substitue à x la valeur de l'abscisse appartenant à ce point); et cette expression se rapporte, d'après les remarques faites sur l'équation primitive, à la partie supérieure de la courbe, le radical étant pris positif; à la partie inférieure, si l'on prend le radical négatif.

Pour le centre O, où $x = 0$, on a $p = \pm 1$; dans ce point, où les parties inférieure et supérieure se confondent, il y a deux valeurs de p, par conséquent deux tangentes HO et GO, dont chacune renferme, avec le diamètre, un angle égal à la moitié d'un droit.

Si l'on fait $p = 0$, on obtient

$$r^2 - 2x^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad x = \pm \frac{r}{2^{\frac{1}{2}}};$$

la tangente est, par conséquent, parallèle au diamètre dans les points M et M′, dont les abscisses correspondantes sont

$$\mathrm{OP} = + \frac{r}{2^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{OP}' = - \frac{r}{2^{\frac{1}{2}}}, \text{ (n° 45).}$$

Enfin, si l'on fait $p = \infty = \frac{1}{0}$, c'est-à-dire en égalant le dénominateur de p à zéro (45), on trouve

$$r^2 - x^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \pm r,$$

c'est-à-dire qu'aux extrémités du diamètre A et B, la tangente est perpendiculaire au diamètre (45).

De plus, on obtient

$$q = \frac{2x^3 - 3r^2x}{r.(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En observant d'abord qu'il faudrait plutôt mettre cette expression sous la forme

$$q = \frac{(2x^2 - 3r^2).(x^2)^{\frac{1}{2}}}{r(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et que le radical positif, tant au numérateur qu'au dénominateur, se rapporte à la partie supérieure de la courbe, comme le radical négatif à la partie inférieure (ce qui a été déjà dit ci-dessus), on trouve que pour les deux valeurs $x = +\frac{r}{2^{\frac{1}{2}}}$ et $x = -\frac{r}{2^{\frac{1}{2}}}$, pour lesquelles $p = 0$, q devient négatif, tant pour la partie supérieure que pour la partie inférieure de la courbe; circonstance qui indique un *maximum*, ainsi qu'on devait s'y attendre (40).

En faisant $q = 0$, on obtient les deux valeurs $x = 0$ $x = r.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; mais la seconde valeur étant impossible, vu l'équation primitive, on n'a qu'à considérer la première (49). Elle indique que le point O est un point d'inflexion (49); car on trouve, en effet, qu'il y a des portions de la courbe de part et d'autre de ce point. Puis, en prenant x positif et regardant y positif, c'est-à-dire en considérant la partie supérieure de la courbe, q devient négatif; donc la courbe y est concave vers l'axe des abscisses (49). En prenant x négatif et y négatif, q devient encore négatif, et la courbe est aussi concave vers l'axe des abscisses, dans sa partie inférieure. Il y a donc en O un point d'inflexion pour la branche MO, aussi bien que pour l'autre branche M'O.

Au reste, il sera aisé de construire la courbe par points, suivant la proposition du problème. Qu'on mène pour cela, en B, une tangente au cercle, sur laquelle on coupe BN',

égale à l'ordonnée du cercle PN ; qu'on mène ensuite ON', le point d'intersection M de cette ligne et de l'ordonnée PN sera un point de la courbe cherchée.

Problème 2. On se propose de trouver la courbe dont l'ordonnée soit à l'ordonnée du cercle comme le rayon est à l'abscisse, commune à l'une et à l'autre de ces courbes.

Le lecteur résoudra aisément ce problème de la même manière que le précédent; on ne lui donnera pour cela que quelques renseignemens.

D'après la proposition, on a pour équation primitive

$$y = \frac{r(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x},$$

ou bien

$$y = r\left(\frac{r^2 - x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les diamètres AB et CD (fig. 10) appartiennent à l'une et à l'autre des courbes.

On a ici

$$p = \frac{-r^3}{x^2(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad q = \frac{r^3(2r^2 - 3x^2)}{x^3(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbe coupe le diamètre à ses deux extrémités. La tangente est perpendiculaire en O; or, pour ce point, y devient infini dans l'équation primitive : donc, le diamètre CD est une asymptote. Lorsque $x = \pm r\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, il y a un point d'inflexion.

Quant aux valeurs de $x = 0$ et $x = \pm r$, pour lesquelles $q = \infty$, voyez n° 49.

La courbe est composée de deux branches, dont l'une est représentée par BZ dans la fig. 10.

La construction de la courbe par points s'effectuera aisément, suivant la proposition du problème.

Problème 3. Étant donnée l'équation du cercle rapportée au diamètre et au sommet (fig. 11), on se propose de trouver la courbe, dont l'ordonnée soit à l'ordonnée du cercle (pour la même abscisse), comme les deux segmens du diamètre. On a donc

$$y^2 : x(2r - x) = x^2 : (2r - x)^2,$$

r étant le rayon du cercle; de là

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}, \quad \text{ou} \quad y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(2r - x)^{\frac{1}{2}}}.$$

La courbe est symétrique, seulement par rapport au diamètre AB. Quant au signe du radical, tout a lieu comme dans le premier problème.

La courbe ne s'étend que depuis A jusqu'à B, au-dessus et au-dessous du diamètre AB.

En différenciant l'équation donnée,

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(2r - x)^{\frac{1}{2}}},$$

on obtient

$$p = \frac{x^{\frac{1}{2}} . (3r - x)}{(2r - x)^{\frac{3}{2}}},$$

expression qui devient aussi nulle quand $x = 0$. Il s'ensuit que la tangente est dans le point A parallèle à l'axe des abscisses; et parce qu'au même point la courbe rencontre l'axe, l'axe des abscisses lui-même est la tangente. La valeur $x = 3r$, pour laquelle p devient aussi nul, ne donne, suivant l'équation primitive, aucune détermina-

tion pour la courbe (49). En B, où $x = 2r$, et $p = \infty$, la tangente est perpendiculaire sur le diamètre, et elle est en même temps une asymptote, y étant ici $= \infty$.

De plus, on a

$$q = \frac{3r^3}{x^{\frac{1}{2}}(2r - x)^{\frac{5}{2}}}.$$

Cette expression devient ∞ quand $x = 2r$ et quand $x = 0$. Quant à la première valeur, pour laquelle aussi $p = \infty$, voyez n° 49. La seconde valeur indique dans la courbe, au point A, un point de rebroussement, les coordonnées étant imaginaires pour x négatif, d'après l'équation proposée (49).

En menant de A jusqu'à la tangente une ligne quelconque AN, et élevant au point d'intersection M′ l'ordonnée du cercle M′P′; faisant, de plus, AP = BP′, et menant l'ordonnée PM qui coupe AN en Q, on aura

$$AP : AP' = PQ : P'M',$$

ou, puisque AP′ = BP, et PM = P′M′,

$$AP : BP = PQ : PM,$$

ce qui satisfait au problème. Donc, PQ sera l'ordonnée de la courbe cherchée, qui s'appelle *cissoïde*. D'après cela, il est aisé de voir que M′N = AQ. Donc, pour la construction de la courbe par points, on n'aura qu'à porter sur une ligne tirée arbitrairement AN, la portion M′N qui se trouve hors du cercle, de A jusqu'à Q; Q sera un point de la courbe.

54. Voici maintenant encore quelques problèmes qui serviront à l'analyse des courbes. Le lecteur résoudra, à l'aide de la méthode précédente, les problèmes, et sera en même temps en état de construire les figures correspondantes; on ne lui donnera que quelques renseignemens.

Problème 4. On se propose de trouver le lieu du sommet du triangle, dans lequel les quarrés de la hauteur et de la base sont entre eux comme les deux segmens de la base.

On obtient pour équation de la courbe

$$y = \frac{ax^{\frac{1}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}, \quad p = \frac{a^2}{2x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{3}{2}}}, \quad q = \frac{a^2(4x-a)}{4x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{5}{2}}}.$$

La courbe a-t-elle un point d'inflexion, et où?

Problème 5. Soit proposé de construire et de tracer la courbe qui a pour équation

$$y^2 = \frac{x^2(b+x)}{a-x}.$$

On a

$$p = \frac{2ab + 3ax - bx - 2x^2}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}.(b+x)^{\frac{1}{2}}},$$

et

$$q = \frac{4a^2b + 4ab^2 + 2abx + 3a^2x - b^2x}{4(a-x)^{\frac{5}{2}}.(b+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour examiner le point où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, ou dans lequel il y a un maximum pour l'ordonnée, il faut égaler à zéro le numérateur de p (45); on obtient par là

$$x = \frac{3a - b \pm [16ab + (3a-b)^2]^{\frac{1}{2}}}{4}.$$

Pour examiner si les deux valeurs de x, dont l'une est positive, l'autre négative, auront lieu, il faut comparer avec elles l'équation primitive, comme il a été fait dans le premier problème; cela s'effectuera le plus aisément par le procédé suivant. La primitive étant

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{b+x}{a-x}=\frac{(b+x)^2}{ab+ax-bx-x^2},$$

ou, en substituant à la valeur de ab, celle qu'on a tirée de l'équation $p=0$,

$$=\frac{(b+x)^2}{x^2+\frac{bx}{2}-\frac{3ax}{2}+ax-bx-x^2};$$

on aura

$$y^2=\frac{-2x(b+x)^2}{a+b};$$

d'où il résulte que la valeur positive de x, tirée de l'équation $p=0$, n'indique aucun point de la courbe. La tangente n'est donc parallèle à l'axe des abscisses que pour une seule valeur de x négatif.

Il faut opérer d'une manière semblable, en examinant la valeur de x, pour laquelle q devient nul. En effet, on déduira de $q=0$,

$$x=\frac{4ab(a+b)}{b^2-3a^2-2ab}=\frac{4ab}{b-3a}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation primitive, il vient

$$y^2=\frac{-16ab^3}{3(b-3a)^2},$$

expression d'une quantité imaginaire. Donc, la valeur $q=0$ n'indique aucune ordonnée.

Nous donnons au lecteur à examiner dans quels points la tangente sera perpendiculaire à l'axe des abscisses, et de quelle nature seront les tangentes aux points $x=0$, $x=a$, $x=-b$. De plus, on demande la nature de la courbe, d'abord, lorsque $b=a$, et puis lorsque $b=0$. Dans le dernier cas, une portion de la courbe, appelée une *feuille*,

s'évanouit, et la courbe elle-même se change dans celle que nous avons considérée dans le problème troisième.

Problème 6. Soit donnée l'équation

$$y = \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} . (b + x)}{x}.$$

On se propose de trouver la figure de la courbe correspondante, qui s'appelle *conchoïde*. On obtient

$$p = \frac{-(a^2 b + x^3)}{x^2 (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad q = \frac{a^2(2a^2 b - x^3 - 3bx^2)}{x^3 (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il sera bon d'examiner séparément les trois cas $b < a$, $b > a$ et $b = a$.

Soit donc, premièrement, $b < a$; l'axe des ordonnées est une asymptote. La tangente, où sera-t-elle perpendiculaire à l'axe des abscisses, et où lui sera-t-elle parallèle?

Il y a du côté négatif des abscisses, entre $x = -b$ et $x = -a$, un *nœud*.

Quant aux valeurs pour lesquelles q devient négatif, il faut comparer les observations faites vers la fin du n° 49.

Pour $q = 0$, on a l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3bx^2 - 2a^2 b = 0;$$

en y appliquant les règles connues, on trouve qu'elle n'a qu'une seule racine réelle et positive, si $b < a$, et si en même temps $b < \frac{a}{\sqrt{2}}$; mais elle peut avoir trois racines réelles, si $b < a$, et si en même temps $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$. Mais, dans le dernier cas, on pourra prouver que ses deux racines réelles et négatives ne répondent à aucune ordonnée; car en substituant successivement dans l'équation du

troisième degré les valeurs $x = -a$, $x = -a\sqrt{2}$ et $x = -4a$, elle donne successivement un résultat négatif, un résultat positif, et encore un résultat positif. On en conçoit que l'équation du troisième degré a deux racines réelles et négatives, chacune plus grande que a, qui n'indiquent ainsi aucune ordonnée, puisque, d'après l'équation primitive, la courbe ne s'étend pas au-delà de $x = -a$. L'équation du troisième degré n'a donc pour $b < a$ qu'une seule racine réelle et positive qui indique une ordonnée. Il n'y aura par conséquent qu'un seul point d'inflexion, du côté positif des abscisses.

Soit, secondement, $b > a$. Il y a un *point conjugué* (*isolé*) appartenant à la courbe, parce que, quand $x = -b$, y devient nul, et qu'immédiatement autour de ce point il n'y a pas d'ordonnée. Ce point a été engendré par l'évanouissement du nœud, dont nous avons fait mention au premier cas.

L'équation du troisième degré

$$x^3 + 3bx^2 - 2a^2b = 0$$

contient, comme on trouve aisément, une racine réelle et négative qui n'indique aucune ordonnée. Il n'y a ici que deux points d'inflexion, un de chaque côté de l'axe des ordonnées.

Soit enfin $b = a$. Lorsque $x = -a$, p devient $= \frac{0}{0}$: on trouve par le n° 36, pour sa vraie valeur, $p = 0$; c'est là qu'il y a un point de rebroussement.

En divisant l'expression de q au numérateur et au dénominateur par $a + x$, on obtient

$$q = \frac{a^2(2a^2 - 2ax - x^2)}{x^3(a+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (a-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il n'y a qu'un seul point d'inflexion, du côté positif des abscisses.

Problème 7. On demande la nature de la courbe qui se décrit par le point M (fig. 12), pris sur la circonférence du cercle GMQ roulant sur la droite AL.

Soit, au commencement du mouvement, le point M en A et $AP = x$, $PM = y$; l'arc $MQ = t$, et le rayon du cercle générateur $= a$.

Élevant en Q une perpendiculaire (qui passe par le centre du cercle O), de manière que $QG = 2a$, et menant sur elle par M la perpendiculaire MN, on aura

$$NQ = \sin \text{verse}\, t = MP = y;$$

d'où

$$t = \text{arc}(\sin \text{verse} = y), \quad MN = (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}} = PQ,$$

$$AP = x = AQ - PQ = AQ - MN = t - (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$x = \text{arc}(\sin \text{verse} = y) - (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}};$$

il en résulte que la courbe cherchée, qu'on appelle *cycloïde* à cause de sa génération, est une courbe transcendante (2).

On voit d'ailleurs aisément, par le n° 29, que cette équation se changerait, pour le rayon $= 1$, en

$$x = a \text{ arc}\left(\sin \text{verse} = \frac{y}{a}\right) - (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En différenciant cette équation (29), on obtient

$$dx = \frac{y\,dy}{(2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On parvient par là aisément, d'après le n° 46, aux expressions pour la tangente, la sous-tangente, la normale et la

sous-normale. L'expression pour la normale $(2ay)^{\frac{1}{2}}$ fait voir que la corde MQ est en même temps la normale, et que, l'angle GMQ étant égal à un droit, MG est la tangente.

On peut différencier une seconde fois l'équation différentielle de la cycloïde, en y regardant, d'après le n° 15, dy et $p = \frac{(2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y}$ comme variables, mais dx comme constant; on obtient ainsi

$$o = (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}} . dy^2 + (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}} . y d^2y - \frac{y . dy^2 (a - y)}{(2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où l'on tire, après les réductions nécessaires,

$$d^2y = \frac{-a dx^2}{y^2}.$$

Au moyen des valeurs trouvées de p et q, on obtient d'abord, d'après le n° 51, pour le rayon de courbure, l'expression suivante :

$$r = -2^{\frac{3}{2}} . a^{\frac{1}{2}} . y^{\frac{1}{2}};$$

puis on obtient, d'après le n° 52,

$$y - \beta = 2y, \quad \text{et} \quad x - \alpha = -2(2ay - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$y = -\beta, \quad \text{et} \quad x = \alpha - 2(-2a\beta - \beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En substituant ces deux valeurs dans l'équation de la cycloïde, trouvée ci-dessus, on parvient à l'équation de la courbe des centres (52),

$$\alpha = \text{arc (sin verse} = -\beta) + (-2a\beta - \beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En menant par le point J, milieu de AL, la perpendiculaire $A'J = 2a$, et par A′ la ligne A′Q′, parallèle à AL; transportant ensuite l'origine des coordonnées de A à A′, en sorte que les abscisses soient prises en sens positif de A′ vers Q′, et les ordonnées de A′ vers J, c'est-à-dire en mettant $-\beta = 2a - \beta'$, et $\alpha = a\pi - \alpha'$, l'équation de la courbe des centres devient

$$\alpha' = a\pi - \text{arc}\,(\sin\text{verse} = 2a - \beta') - (2a\beta' - \beta'^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou, en observant que deux arcs dont les sinus verses réunis composent le diamètre, sont ensemble égaux à la demi-circonférence du cercle,

$$\alpha' = \text{arc}\,(\sin\text{verse} = \beta') - (2a\beta' - \beta'^2)^{\frac{1}{2}};$$

il en résulte que la courbe des centres A′M′A est une cycloïde, semblable et égale à la proposée.

De la différentielle de l'aire.

55. La proposition du n° 24, dont nous avons fait usage pour trouver la différentielle de l'arc d'une courbe, nous conduira maintenant à la différentielle de l'aire d'une courbe.

Soit (fig. 13) A l'origine des coordonnées, $AP = x$, $PQ = \Delta x$, $PM = y$, $QN = y + \Delta y$; qu'on mène par M et N deux parallèles à l'axe des abscisses MM′ et NN′. En désignant par s l'aire ABMP, qui sera nécessairement une fonction de x, il faudra désigner par Δs la portion de l'aire PQNM. Or, l'aire Δs est plus grande que le parallélogramme PQMM′, dont la mesure est $= y.\Delta x$, et elle est moindre que le parallélogramme PQN′N, dont la mesure est $= (y + \Delta y).\Delta x$, ou, d'après le théorème de Taylor (17),

$$= \Delta x\left(y + p.\Delta x + \frac{q}{1.2}\Delta x^2 + \ldots\right).$$

On aura donc

$$\Delta s > y\Delta x, \quad \text{et} \quad \Delta s < \Delta x.(y + p.\Delta x + \ldots),$$

ou

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} > y, \qquad \text{et} \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} < y + p.\Delta x + q.\frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots;$$

de là, d'après le n° 24,

$$\frac{ds}{dx} = y, \quad \text{ou} \quad ds = y dx,$$

c'est-à-dire que la différentielle de l'aire d'une courbe est égale à l'ordonnée de la courbe, multipliée par la différentielle de l'abscisse.

Cherchons encore la différentielle de l'aire d'une courbe rapportée aux coordonnées obliques.

Soit, fig. 14, l'angle ABX, formé par les deux axes des coordonnées BA et BX, $= \omega$; soit $BQ = x$, $QN = y$, et $QS = \Delta x$. En menant SR′ parallèle à QN, et par N et R′ les NN′ et RR′ parallèles à l'axe des abscisses, on a.... $N'R' = \Delta y$.

En désignant par S l'aire ABQN, et par ΔS l'aire QNR′S, on a

$$\Delta S < \text{parallélogramme QSNN}',$$

et $\Delta S >$ parallélogramme QSR′R; c'est-à-dire

$$\Delta S < (y + \Delta y).\sin\omega.\Delta x,$$

et $$\Delta S > y.\sin\omega.\Delta x.$$

Développant la première de ces deux expressions par le n° 17, et raisonnant alors de la même manière que ci-dessus, on obtient

$$dS = y.\sin\omega.dx.$$

Sur les Équations des courbes rapportées aux coordonnées polaires.

56. Dans l'application du calcul différentiel à la Géométrie, nous n'avons, jusqu'ici, rapporté les courbes qu'aux coordonnées rectangles et obliques; il nous reste encore à dire le plus essentiel sur le système des coordonnées polaires, dont on fait un fréquent usage. Dans ce système le *rayon vecteur* (*radius vector*), tiré d'un point fixe, nommé le *pôle*, aux différens points de la courbe, et l'angle (ou une fonction dépendante de cet angle) entre le rayon vecteur et une droite déterminée, tiennent lieu des deux variables dans l'équation de la courbe.

Nous rappellerons au lecteur, en peu de mots, pour donner un exemple, le procédé par où l'on pourra passer de l'équation de l'ellipse rapportée au centre et à ses axes

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

à celle en coordonnées polaires. En regardant le foyer comme le pôle, et la ligne menée de là à la courbe comme le rayon vecteur, que nous désignerons par u; notant de plus l'angle entre le rayon vecteur et l'axe des x par t, il faudra substituer successivement dans l'équation ci-dessus, les valeurs suivantes,

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad x = x' - c, \quad y = u.\sin t, \quad x' = u.\cos t;$$

on obtient par là

$$a^2u^2 = (c.u.\cos t + b^2)^2.$$

En prenant de cette équation la racine quarrée, on observera que le double signe se rapporte à la position opposée du rayon vecteur u des deux côtés de l'axe des x; en se servant seulement du signe positif, on parvient enfin à l'équation

polaire de l'ellipse

$$u = \frac{b^2}{a - c.\cos t}.$$

On pourra, *vice versâ*, passer de cette équation polaire à celle en coordonnées rectangles, par le moyen de la substitution des valeurs

$$u = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \cos t = -\frac{x'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Exprimons maintenant les différentielles de l'arc et de l'aire d'une courbe par les coordonnées polaires.

Quant à la différentielle de l'arc, il n'est besoin que de substituer dans l'expression

$$d\varphi = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (n° 26)},$$

qui donne cette même différentielle en coordonnées rectangles, $u.\cos t$ au lieu de x, et $u.\sin t$ au lieu de y, donc (n° 27), $\cos t.du - u.\sin t.dt$ au lieu de dx, et $\sin t.du + u.\cos t.dt$ au lieu de dy. En effet, si l'on effectue cette substitution, qui ne présente aucune difficulté, on obtient, après les réductions nécessaires, pour la différentielle de l'arc d'une courbe en coordonnées polaires, l'expression suivante,

$$d\varphi = (du^2 + u^2.dt^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Quant à la différentielle de l'aire, comprise entre deux rayons vecteurs, soit (fig. 15) dans la courbe KN, exprimée par des coordonnées polaires, l'angle NOK $= t$, donc l'angle N'OK $= t + \Delta t$; soit de plus l'aire NOK $= S$, donc l'aire N'OK $= S + \Delta S$; on aura donc l'angle N'ON $= \Delta t$, et l'aire N'ON $= \Delta S$. Qu'on mène de O deux arcs de cercle NQ et N'Q' avec les rayons ON et ON'. Soit ON $= u$, donc ON' $= u + \Delta u$, et QN' $= \Delta u$. On voit aisément que ΔS est

compris entre les deux secteurs de cercle ONQ et ON'Q', qui ont pour mesure

$$\frac{u^2\Delta t}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(u+\Delta u)^2.\Delta t}{2};$$

donc, en divisant par Δt et mettant, d'après le n° 17,

$$\Delta u = \frac{du}{dt}\Delta t + \frac{d^2u}{dt^2}.\frac{\Delta t^2}{1.2} + \ldots,$$

on a

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} > \frac{u^2}{2},$$

et

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} < \frac{u^2}{2} + u.\frac{du}{dt}.\Delta t + \left(u.\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du^2}{dt^2}\right).\frac{\Delta t^2}{1.2} + \ldots;$$

de là, d'après le n° 24,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{u^2}{2}, \quad \text{ou} \quad dS = \frac{u^2}{2}.dt,$$

c'est-à-dire que la différentielle de l'aire comprise entre les rayons vecteurs d'une courbe rapportée aux coordonnées polaires, est égale à la moitié du quarré du rayon vecteur multiplié par la différentielle de l'angle.

On parvient sans difficulté à l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires; il n'est besoin que de mettre dans son expression en coordonnées rectangulaires (n° 51), $u.\cos t$ au lieu de x, et $u.\sin t$ au lieu de y.

Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes suivans.

Problème 1. Dans un cercle, dont le diamètre $CF = a$ (fig. 15), soit menée du sommet C, sous un angle variable $ECF = t$, la corde CE, prolongée de part et d'autre, en sorte qu'on ait $ED = EB$ égale à une longueur donnée m. Dans quelle courbe se trouveront les points D et B?

Soit $CD = z'$, $BC = z''$; on a, par les conditions don-

nées,

$$CE = a.\cos t, \quad z' = m + a.\cos t, \quad z'' = m - a.\cos t.$$

Désignant, de plus, par z le rayon vecteur en général, dont les deux valeurs, pour une valeur particulière de l'angle t, sont z' et z'', on aura

$$(z - z').(z - z'') = 0.$$

De là résulte l'équation polaire cherchée

$$z = m \pm a.\cos t.$$

Il faut bien observer que dans les deux parties de z, savoir z' et z'', on n'a pas considéré leur position opposée, mais seulement leur valeur absolue, c'est-à-dire leur longueur. (*Voyez* n° 25.)

Comment pourra-t-on exprimer cette équation en coordonnées rectangulaires?

Si $m = a$, la courbe prend, à cause de sa figure, le nom de *cardioïde;* elle est représentée (fig. 15) par HDC.

En développant, dans l'équation en coordonnées rectangles, $\frac{dy}{dx} = p$, et égalant à zéro, dans cette expression, successivement le numérateur et le dénominateur, chacun en particulier, on sera en état d'examiner plus exactement la figure de la courbe.

Il y a en C un point de rebroussement, où la tangente est l'axe même des abscisses.

Les différentielles de l'arc et de l'aire sont pour la cardioïde, en coordonnées polaires,

$$\frac{(2a)^{\frac{1}{2}}.dz}{(2a - z)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{z^2.dz}{2(2az - z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Problème 2. Sur le rayon d'un cercle, un point, à par-

tir du centre, se meut vers la circonférence, et il y arrive quand le rayon, qui se tourne en même temps et uniformément autour du centre, sera arrivé à sa première position. Quelle sera la courbe décrite par ce point?

La courbe s'appelle la *spirale d'Archimède*, et elle consiste en tours continuels autour du centre du cercle.

Le centre du cercle étant supposé le pôle, et le rayon $=1$, la courbe aura pour équation

$$u = \frac{t}{2\pi}.$$

CALCUL INTÉGRAL.

57. Le calcul intégral s'occupe de la recherche de la fonction primitive qui répond à une différentielle proposée. Une telle fonction primitive s'appelle *intégrale* (*æquatio integra*); elle se désigne par la lettre $\int$, que l'on met devant la différentielle, de manière que si, par exemple, X est une fonction de x, et Xdx la différentielle proposée, l'intégrale correspondante se note par $\int Xdx$. Le signe $\int$, comme l'initiale du mot *somme*, a le même rapport au signe Σ que d et Δ ont entre eux, en sorte que $\int$ répond à d, et Σ à Δ; on a, d'après cela, $\Sigma\Delta y = y$ et $\int dy = y$.

Comme nous n'avons cherché dans le calcul différentiel, jusqu'ici, que la différentielle des fonctions primitives de la forme $y = X$, où X renferme seulement x comme quantité variable (n° 4), nous ne nous occuperons, dans ce qui suit, que de l'intégration des différentielles de la forme $dy = Xdx$, où aussi X ne contient que x comme variable.

Voici encore quelques propositions concernant le calcul intégral en général.

Nous avons vu (n° 8) que toutes les fonctions primitives qui ne diffèrent entre elles que sous le rapport de la partie constante ont la même différentielle; il faut donc ajouter à l'intégrale trouvée une quantité constante (*constante arbitraire*), qui se désigne ordinairement par C (*constans*). L'*intégrale complète* de $dy = Xdx$ sera donc

$$y = \int Xdx + C.$$

Cette intégrale complète renferme donc infiniment de

fonctions primitives qui toutes donnent la différentielle $X dx$.

Nous savons, de plus, par le calcul différentiel (8), qu'on a

$$d.(u+v+\ldots) = du + dv + \ldots,$$

où u, v,.... sont des fonctions de x; nous en concluons avec raison

$$\int(du+dv+\ldots)=\int d(u+v+\ldots)=u+v+\ldots=\int du+\int dv+\ldots,$$

c'est-à-dire que l'intégrale d'une somme de différentielles est égale à la somme des intégrales de chacune des différentielles en particulier. Dans ce cas, il suffit d'ajouter à la somme entière des intégrales une seule constante, ce qui revient au même d'ajouter à chaque intégrale une constante particulière.

On tire de $d.(a.u) = a.du$ (11), où a est constant et u une fonction de x,

$$\int a.du = a\int du = a.u,$$

c'est-à-dire que le facteur constant de la différentielle peut être regardé comme le facteur de l'intégrale.

Intégration des différentielles rationnelles, entières et fractionnaires.

58. Pour traiter le calcul intégral dans le même ordre que nous avons suivi dans le calcul différentiel, nous parlerons d'abord de l'intégration des différentielles rationnelles et entières.

De $d.x^n = nx^{n-1}dx$ (12), d'où $\frac{1}{n}\, d.x^n = x^{n-1}dx$, il

résulte

$$\int x^{n-1}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}.x^n}{n} + \mathrm{C} = (\text{n}^\circ\ 57)\ \frac{x^n}{n} + \mathrm{C},$$

c'est-à-dire qu'on intègre la différentielle $x^m\mathrm{d}x$, où m est un nombre entier, en augmentant l'exposant d'une unité et en divisant par le nouvel exposant et par $\mathrm{d}x$.

L'exposant m, dans la différentielle $x^m\mathrm{d}x$, peut aussi être négatif; on a ainsi

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^m} = \frac{1}{(1-m)x^{m-1}} + \mathrm{C}. \text{ (\textit{Voyez} n° 13.)}$$

D'après cela, et d'après le numéro précédent, on a, de plus,

$$\begin{aligned}\int (x^{n-1}\mathrm{d}x + x^{m-1}\mathrm{d}x) &= (57)\int x^{n-1}\mathrm{d}x + \int x^{m-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^n}{n} + \frac{x^m}{m} + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

On a encore

$$\int ax^{n-1}\mathrm{d}x = a\int x^{n-1}\mathrm{d}x\ (\text{n}^\circ\ 57) = \frac{a}{n}x^n + \mathrm{C}.$$

Soit à intégrer $\int (ax+b)^m\mathrm{d}x$.

En développant, d'après le théorème du binome, l'expression $(ax+b)^m$, il faut multiplier chaque terme par $\mathrm{d}x$, et intégrer ensuite chaque différentielle en particulier. On réduira, de cette manière, l'intégration proposée à celle de l'expression $\int ax^n\mathrm{d}x$, traitée ci-dessus.

Soit, pour exemple, $\int (ax+b)^2\mathrm{d}x$; on obtient aisément pour cela, d'après cette méthode,

$$\frac{a^2}{3}x^3 + abx^2 + b^2x + \mathrm{C}.$$

On pourrait parvenir sur-le-champ à l'intégrale..... $\int (ax+b)^m\mathrm{d}x$, en posant $ax+b=z$, d'où

$$x = \frac{z - b}{a} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dz}{a}.$$

L'intégrale proposée devient par là

$$\int \frac{z^m}{a} dz = \frac{z^{m+1}}{a(m+1)} + C = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C.$$

On propose d'appliquer le développement par le moyen du théorème du binome, à l'intégrale $\int (ax^n + b)^m dx$.

Soit, pour exemple, $\int (ax^3 + b)^2 dx$. On a

$$\int (ax^3 + b)^2 dx = \int a^2 x^6 dx + \int 2abx^3 dx + \int b^2 dx = \frac{a^2 x^7}{7} + \frac{2ab}{4} x^4 + b^2 x + C.$$

59. Quant aux différentielles rationnelles et fractionnaires, elles sont de la forme $\frac{u}{v} dx$, où u et v sont de la forme $a + bx + cx^2 + \ldots$

Nous observons d'abord que l'exposant le plus élevé de x en u peut être supposé en général au moins moindre d'une unité que celui de x en v, parce qu'au cas contraire une simple division pourra changer l'expression $\frac{u}{v}$ en... $r + \frac{u'}{v'}$, où r est une fonction entière et où l'exposant le plus élevé de x en u' est au moins moindre d'une unité que celui en v'. C'est ainsi, par exemple, que la fraction

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x + 3}{x^2 + 1}$$

se change, par la division, en

$$x^2 + x - 1 - \frac{3x - 4}{x^2 + 1}.$$

Pour intégrer maintenant $\frac{u}{v}\,dx$, où v renferme une dimension plus élevée de x que u, il faut décomposer $\frac{u}{v}$ en *fractions partielles*, en se servant d'un procédé qui se fonde sur la détermination des coefficiens indéterminés, et que nous rappellerons au lecteur par quelques considérations.

(1). Si v ne renferme que des facteurs simples, réels, tous inégaux entre eux, on aura

$$\frac{u}{(x+a)(x+a')\ldots}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+a'}+\ldots,$$

où les quantités constantes A, B, ... se pourront déterminer par la méthode des coefficiens indéterminés. L'intégrale proposée $\int\frac{u}{v}\,dx$ se réduira, dans ce cas, à

$$\int\frac{A}{x+a}\,dx.$$

(2). Si v est composé entièrement, ou en partie, de facteurs égaux entre eux, de la forme $(x+a)^n$, on mettra

$$\frac{u}{(x+a)^n.(x+a')}=\frac{A}{(x+a)^n}+\frac{B}{(x+a)^{n-1}}+\ldots+\frac{M}{x+a}+\frac{N}{x+a'},$$

et l'on aura à intégrer, dans ce cas,

$$\int\frac{A.dx}{(x+a)^n},\quad\text{et encore}\quad\int\frac{A\,dx}{x+a'}.$$

(3). Si v est composé entièrement, ou en partie, de facteurs réels, du second degré et inégaux entre eux, de la forme x^2+a^2, on aura

$$\frac{u}{(x^2+a^2)(x+a')}=\frac{Ax+B}{x^2+a^2}+\frac{C}{x+a'},$$

ou

$$=\frac{A'}{x+a\sqrt{-1}}+\frac{B'}{x-a\sqrt{-1}}+\frac{C}{x+a'},$$

et l'intégrale proposée se réduira, dans ce cas, à

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{x^2+a^2},\quad \text{ou}\quad \int\frac{A'dx}{x\pm a\sqrt{-1}}\ \text{et à}\ \int\frac{A}{x+a'}\,dx.$$

(4). Enfin, si v est composé entièrement, ou en partie, de facteurs du second degré, réels et égaux entre eux, on aura

$$\frac{u}{(x^2+a^2)^n.(x+a')}=\frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^n}+\frac{Cx+D}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\ldots$$
$$+\frac{Mx+N}{x^2+a^2}+\frac{O}{x+a'},$$

et l'intégrale proposée se réduit, dans ce cas, à

$$\int\frac{(Ax+B)}{(x^2+a^2)^n}\,dx\quad\text{et}\quad\int\frac{A}{x+a'}\,dx.$$

Ainsi, en général, on n'aura, pour l'intégration de la différentielle rationnelle et fractionnaire $\frac{u}{v}\,dx$, qu'à chercher les quatre intégrales suivantes :

$$\int\frac{A}{x+a}dx,\ \int\frac{A}{(x+a)^n}dx,\ \int\frac{(Ax+B)}{x^2+a^2}dx,\ \int\frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^n}dx,$$

que nous allons considérer maintenant de plus près.

60. On conclut de $d.\log x=\frac{dx}{x}$ (19) que $\int\frac{dx}{x}=\log x$, et de même, que

$$\int\frac{dx}{x+a}=\log(x+a),\ \text{donc}\ \int\frac{A}{x+a}dx=(57)A.\log(x+a)+C.$$

Quant à la seconde intégrale, on mettra $x+a=z$,

d'où $dx = dz$; il vient par là

$$\int \frac{A}{(x+a)^n} dx = \int \frac{A}{z^n} dz = (58) \frac{-A}{(n-1)z^{n-1}} + C = \frac{-A}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C.$$

Quant à la troisième intégrale, on a (57)

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)} dx = \int \frac{Ax}{x^2+a^2} dx + \int \frac{B}{x^2+a^2} dx;$$

en mettant dans $\int \frac{Ax}{x^2+a^2} dx$, $x^2 + a^2 = z$, d'où... $xdx = \frac{dz}{2}$, il viendra

$$\int \frac{Ax.dx}{x^2+a^2} = \int \frac{A}{2} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{A}{2} . \log z + C = \frac{A}{2} \log (x^2 + a^2) + C.$$

Il vient, de plus,

$$\int \frac{Bdx}{x^2+a^2} = \int \frac{B}{a} \cdot \frac{\frac{dx}{a}}{\frac{x^2}{a^2} + 1} = (28) \frac{B}{a} . \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right) + C.$$

On aura donc

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+a^2} dx = \frac{A}{2} \log (x^2 + a^2) + \frac{B}{a} . \text{arc} \left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right) + C.$$

Enfin, la quatrième intégrale se décompose dans les deux suivantes :

$$\int \frac{Ax}{(x^2+a^2)^n} dx + \int \frac{B}{(x^2+a^2)^n} dx.$$

En mettant $x^2 + a^2 = z$, d'où l'on tire $xdx = \frac{dz}{2}$, on aura

$$\int \frac{Ax}{(x^2+a^2)^n} dx = \int \frac{A}{2} \cdot \frac{dz}{z^n} = \frac{-A}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{z^{n-1}} + C$$

$$= \frac{-A}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Mais quant à l'intégrale $\int \frac{B}{(x^2+a^2)^n} dx$, on mettra

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{Mx}{(x^2+a^2)^{n-1}} + N \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

En différenciant cette équation, réduisant le tout au même dénominateur, divisant par dx, et égalant entre elles les quantités constantes ainsi que les coefficiens de x^2 dans les deux membres de l'équation, on obtiendra

$$M = \frac{1}{2(n-1)a^2}, \quad N = \frac{2n-3}{2(n-1)a^2};$$

on aura donc

$$\int \frac{B}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{B}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{B(2n-3)}{2(n-1)a^2} \cdot \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}};$$

on diminuera par cette formule l'exposant du dénominateur d'une unité, et l'intégrale se réduira enfin à

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}, \text{ égale à } \frac{1}{a} \cdot \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right),$$

comme nous avons montré précédemment.

61. *Exemple* 1. Pour l'application de la méthode pour intégrer une différentielle rationnelle et fractionnaire, soit proposé

$$\int \frac{(x^2+1+x)dx}{(x^2+1)^2 . x^2 . (x+1)}.$$

Qu'on pose, d'après le n° 59,

$$\frac{x^2+1+x}{(x^2+1)^2 . x^2 (x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x^2} + \frac{F}{x} + \frac{G}{x+1};$$

en réduisant tout au même dénominateur, et égalant entre eux les coefficiens des mêmes puissances de x dans les deux membres de l'équation, on obtiendra

$$A=-\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=-\frac{1}{4},\ D=-\frac{3}{4},\ E=1,\ F=0,\ G=\frac{1}{4}.$$

On a donc

$$\int\frac{(x^2+1+x)dx}{(x^2+1)^2.x^2.(x+1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{(x+3)dx}{x^2+1}$$
$$+\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}.$$

D'après ce que nous avons exposé dans le n° 60, sur ces quatre intégrales, on a d'abord

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2};$$

en mettant

$$x^2+1=z,\quad \text{d'où}\quad xdx=\frac{dz}{2},$$

on trouvera

$$-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^2}=\frac{1}{4z}=\frac{1}{4(x^2+1)}.$$

On mettra, de plus,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax}{x^2+1}+B\int\frac{dx}{x^2+1};$$

en différenciant et réduisant tout au même dénominateur, on obtient $A=B=\frac{1}{2}$; donc, on trouvera

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\text{arc}(\text{tang}=x).$$

On a, par conséquent,

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{4(x^2+1)}-\frac{x}{4(x^2+1)}-\frac{1}{4}\text{arc}\,(\text{tang}=x).$$

La seconde intégrale $-\frac{1}{4}\int\frac{(x+3)dx}{x^2+1}$ est

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{x^2+1}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{8}\log(x^2+1)-\frac{3}{4}\text{arc}(\text{tang}=x).$$

La troisième intégrale $\int\frac{dx}{x^2}$ est $=-\frac{1}{x}$.

La quatrième intégrale $\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}$ est $=\frac{1}{4}\log(x+1)$.

On aura donc

$$\int\frac{(x^2+1+x)dx}{(x^2+1)^2.x^2.(x+1)}=\frac{1-x}{4(x^2+1)}-\text{arc}\,(\text{tang}=x)$$
$$-\frac{1}{x}-\frac{1}{8}\log(x^2+1)+\frac{1}{4}\log(x+1)+C.$$

Exemple II. $\int\frac{(x^3-1)dx}{x^2+2}$. Il faut décomposer la fraction, d'après le n° 59, en une fonction entière, et une autre fraction dans laquelle la dimension du numérateur soit moindre que celle du dénominateur.

Exemple III. $\int\frac{(x-1)dx}{x^3-2x^2+x-2}$. L'équation du troisième degré au dénominateur, a la racine réelle, $+2$.

De l'Intégration des différentielles irrationnelles.

62. Les différentielles irrationnelles se peuvent aisément intégrer, d'après le n° 12, si le radical ne renferme qu'une seule quantité (c'est-à-dire s'il est un *monome*); car nous avons vu que $d.x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$, où m et n désignent des nombres entiers. On a, par conséquent,

$$\frac{d.x^{\frac{m}{n}}}{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}-1} dx; \quad \text{donc} \int x^{\frac{m}{n}-1} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}}}{\frac{m}{n}} + C;$$

c'est-à-dire que pour intégrer un monome irrationnel, il faut augmenter l'exposant d'une unité, et diviser par ce nouvel exposant et par dx.

On a, par les mêmes raisons,

$$\int x^{-\frac{m}{n}-1} dx = \frac{-x^{-\frac{m}{n}}}{\frac{m}{n}} + C.$$

Exemple I. $\int ax^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} ax^{\frac{3}{2}} + C.$

Exemple II. $\int \frac{a}{x^{\frac{3}{2}}} dx = -2a.\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + C.$

Lorsque le radical consiste en deux termes, ou qu'il est un binome, on peut changer souvent, au moyen d'une substitution convenable, la différentielle irrationnelle en une différentielle rationnelle.

Examinons, par exemple, les cas où la différentielle...

$x^{m-1}\mathrm{d}x(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, m, n, p, q, étant des nombres tiers, deviendra rationnelle. En mettant $a+bx^n=$ d'où

$$x^n=\frac{z^q-a}{b},\quad x^m=\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},$$

$$x^{m-1}\mathrm{d}x=\frac{q}{nb}z^{q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\mathrm{d}z,$$

on obtient au lieu de la différentielle proposée,

$$\frac{q}{nb}z^{p+q-1}\mathrm{d}z\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1},$$

qui devient rationnelle, comme on le voit clairement $\frac{m}{n}$ est un nombre entier.

Mais si l'on met dans la différentielle proposée,

$$a+bx^n=x^nz^q,$$

d'où

$$x^n=\frac{a}{z^q-b},\quad x=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{(z^q-b)^{\frac{1}{n}}},$$

$$x^m=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^q-b)^{\frac{m}{n}}},\quad x^{m-1}\mathrm{d}x=\frac{-a^{\frac{m}{n}}.q.z^{q-1}\mathrm{d}z}{n(z^q-b)^{\frac{m}{n}+1}},$$

on obtient, au lieu de la différentielle proposée,

$$\frac{-a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.q.z^{p+q-1}\mathrm{d}z}{n(z^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}},$$

différentielle rationnelle, si $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$ est un nombre entier.

On en conclura que la différentielle $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ devient rationnelle, si $\frac{m}{n}$ ou $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ sont des nombres entiers.

Exemple I. Soit à intégrer $x^{m-1}(a+bx^m)^{\frac{p}{q}}dx$. L'intégrale est

$$\frac{(a+bx^m)^{\frac{p}{q}+1}}{\left(\frac{p}{q}+1\right)mb} + C.$$

Exemple II. $x^4dx(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}$.

Nous nous occuperons encore de quelques différentielles irrationnelles qui sont composées de radicaux binomes, et nous indiquerons la substitution par laquelle elles peuvent devenir rationnelles.

Dans la différentielle $Xdx\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}}$, où X est une fonction rationnelle de x, on mettra $\frac{a+bx}{a'+b'x} = z^n$.

De plus, dans la différentielle

$$\frac{Xdx}{(a+bx)^{\frac{m}{n}} - (a+bx)^{\frac{m'}{n'}}},$$

où X est une fonction rationnelle de x, on mettra

$$a+bx = z^{\frac{nn'}{mm'}}.$$

Exemple III. Soit à intégrer $\dfrac{x^2 dx}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}}$.

Exemple IV. $x^3 dx \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Exemple V. $x dx (1+2x)^{\frac{1}{3}}$.

Exemple VI. $\dfrac{x dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Exemple VII. $\dfrac{x dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Considérons maintenant l'intégration de quelques formes particulières des différentielles irrationnelles.

Intégration des différentielles

$$\frac{X dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{X dx}{(a+bx-cx^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

63. Pour rendre rationnelle la différentielle..... $\dfrac{X dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}}$, où X est une fonction rationnelle de x, il faut mettre

$$(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c}.x + z,$$

et élever au quarré les deux membres de cette équation ; on obtient par là

$$x = \frac{a - z^2}{2\sqrt{c}.z - b}.$$

Il en résulte

$$dx = \frac{-2(\sqrt{c}.z^2 + a\sqrt{c} - bz)}{(2\sqrt{c}.z - b)^2}\,dz,$$

et

$$(a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c}.x + z = \frac{\sqrt{c}.z^2 + a\sqrt{c} - bz}{2\sqrt{c}.z - b}.$$

Il est aisé de voir que la différentielle proposée devient par là rationnelle.

Exemple I. Soit $X = 1$; la différentielle proposée sera donc

$$\frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Par la substitution ci-dessus indiquée, on obtient

$$\frac{-2dz}{2\sqrt{c}.z - b}.$$

L'intégrale en est (60)

$$-\frac{1}{\sqrt{c}}.\log(2\sqrt{c}.z - b)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}.\log\{2\sqrt{c}[(a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{c}.x] - b\} + C.$$

Exemple II. Soit $\int \frac{dx}{2x(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$,

où $X = \frac{1}{2x}$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

On obtient

$$x = \frac{1 - z^2}{2z},\quad dx = \frac{-(1 + z^2)dz}{2z^2},\quad (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1 + z^2}{2z},$$

et l'intégrale devient par là

$$-\int\frac{dz}{1-z^2}=(\text{n}^\circ\,59)-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z}-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1-z}=-\frac{1}{2}\log(1+z)$$

$$+\frac{1}{2}\log(1-z)=\log\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient ainsi, puisque $z=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-x$, pour l'intégrale cherchée

$$\log\left[\frac{1+x-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{1-x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}+\text{C}.$$

Exemple III. $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$, où $X=x, a=1, b=0, c=1$.

On obtient pour l'intégrale

$$-\int\frac{(1-z^2)dz}{2z^2}=(57)-\int\frac{dz}{2z^2}+\int\frac{dz}{2}$$

$$=(\text{n}^\circ\,58)\ \frac{1}{2z}+\frac{z}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+z^2}{z}\right),$$

ou, puisque $z=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-x$,

$$=\frac{1+x^2-x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(\ +x^2)^{\frac{1}{2}}-x}=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-x]}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-x}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+\text{C}.$$

On parvient plus aisément à l'intégrale, en mettant dans la différentielle proposée $1+x^2=z^2$. (*Voyez* n° 62.)

Le lecteur pourra encore s'exercer sur les exemples suivans.

Exemple IV. $\int\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx}{2x^2}$. On parvient plus facilement que par la substitution prescrite ci-dessus, à l'intégrale, en mettant $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=xz$ (62).

Exemple V. $\int xdx(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$. On opérera le plus commodément, en mettant $1+x^2=z^2$ (62).

Exemple VI. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{x[x-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}]} + C.$

64. Considérons maintenant la différentielle

$$\frac{Xdx}{(a+bx-cx^2)^{\frac{1}{2}}},$$

qui ne diffère de celle que nous avons traitée dans le numéro précédent, que par le signe négatif de c. Mettant, dans ce cas, tout conformément à la règle du n° 63,

$$(a+bx-cx^2)^{\frac{1}{2}} = x.\sqrt{-c} + z,$$

on obtiendra

$$\frac{dx}{(a+bx-cx^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2dz}{2\sqrt{-c}.z-b},$$

par où la différentielle proposée devient rationnelle.

Soit d'abord $X = 1$; l'intégrale proposée devient par là

$$\int \frac{dx}{(a+bx-cx^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{-2dz}{2\sqrt{-c}.z-b} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}} \log(2\sqrt{-c}.z-b)$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}} \log[2(a+bx-cx^2)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{-c}+2cx-b],$$

ou, en faisant $x = u + \frac{b}{2c}$,

$$= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}} \log 2\sqrt{c}\left[\left(\frac{4ac+b^2}{4c} - cu^2\right)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{-1}+u\sqrt{c}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}} \log(4ac+b^2)^{\frac{1}{2}}\left[\sqrt{-1}.\left(1-\frac{4c^2u^2}{4ac+b^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2cu}{(4ac+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}} \log(4ac+b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}} \log\left[\frac{2cu}{(4ac+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{-1}\left(1-\frac{4u^2c^2}{4ac+b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + C;$$

en mettant ici $\frac{2cu}{(4ac+b^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos t$, et ajoutant la partie invariable à la constante arbitraire, il vient

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}} \log(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) + C,$$

où

$$t = \text{arc}\left(\cos = \frac{2cu}{(4ac+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = \text{arc}\left(\cos = \frac{2cx-b}{(4ac+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Mais en substituant $x = u + \frac{b}{2c}$ immédiatement dans l'intégrale proposée, on obtient

$$\int \frac{du}{\left(a + \frac{b^2}{4c} - cu^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{du}{\left(\frac{b^2+4ac}{4c} - cu^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int \frac{\frac{2\sqrt{c}du}{(b^2+4ac)^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 - \frac{4u^2c^2}{b^2+4ac}\right)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{2cdu}{(b^2+4ac)^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 - \frac{4c^2u^2}{b^2+4ac}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= (28)\ \frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc}\left(\sin = \frac{2cu}{(b^2+4ac)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc}\left(\cos = \frac{2cx-b}{(b^2+4ac)^{\frac{1}{2}}}\right) + C,$$

qui est aussi l'intégrale cherchée.

Ainsi nous avons obtenu, pour la différentielle proposée, deux intégrales, dont la première renferme un logarithme imaginaire, et la dernière un arc de cercle réel.

Remarque. On pourra exprimer la dernière intégrale que nous avons trouvée, en y mettant t au lieu de l'arc,

aussi par

$$-\frac{1}{\sqrt{c}}t + C,$$

et en comparant maintenant les deux intégrales trouvées, on a

$$-\frac{1}{\sqrt{c}}.t = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}}\log(\cos t + \sqrt{-1}.\sin t) + C',$$

où C' représente la quantité constante, qui est composée des constantes arbitraires des deux intégrales.

En faisant $C' = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{c}}\log m$, et divisant les deux membres de l'équation par $\sqrt{-1}$, on obtiendra

$$t.\sqrt{-1} = \log\left(\frac{\cos t + \sqrt{-1}.\sin t}{m}\right);$$

faisant maintenant $t = 0$, il vient $m = 1$, d'où $C' = 0$. L'équation ci-dessus se change donc en

$$t.\sqrt{-1} = \log(\cos t + \sqrt{-1}.\sin t).$$

Or, nous avons prouvé, dans le n° 33, que

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}.\sin x.$$

On voit donc par là, que de $e^z = y$, lorsque z et y sont imaginaires, on tire $z = \log y$, et que de même, réciproquement, de $z = \log y$, on tire $e^z = y$. De là il s'ensuit que pour $nz = n.\log y = \log y^n$ (33), on a $e^{nz} = y^n$, et parce que, d'après ce qui précède, $y^n = (e^z)^n$, on aura

$$e^{nz} = (e^z)^n.$$

Exemple I. Soit à intégrer $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, où $X = 1$,

$a=1$, $b=0$, $c=1$. On obtient, d'après ce qui précède, les deux intégrales

$$\sqrt{-1}.\log[x+\sqrt{-1}.(1-x^2)^{\frac{1}{2}}],$$

et

$$-\operatorname{arc}(\cos=x)=\operatorname{arc}(\sin=x),$$

dont la dernière s'accorde avec le n° 28.

Exemple II. $\int\frac{dx}{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, où $X=\frac{1}{x}$, $a=1$, $b=0$, $c=1$. A l'aide de la substitution indiquée au commencement de ce numéro, savoir de $x\sqrt{-1}+z$ au lieu de $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\int\frac{2dz}{z^2-1}=(59)-\int\frac{dz}{z+1}+\int\frac{dz}{z-1}=-\log(z+1)+\log(z-1)$$

$$=-\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=-\log\left[\frac{(z+1)^2}{z^2-1}\right]$$

$$=-\log\left\{\frac{2[1+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}].[x\sqrt{-1}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]}{2x[x+\sqrt{-1}.(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]}\right\}$$

$$=-\log\left[\frac{1+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}.\sqrt{-1}\right]+C,$$

ou, en comprenant $-\log.\sqrt{-1}$ dans la constante arbitraire,

$$=-\log\left[\frac{1+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\right]+C.$$

Exemple III. On opérera de la même manière sur l'intégrale $\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$. On obtient $\frac{2}{\sqrt{-1}(1-z^2)}$. En remettant, au lieu de z, sa valeur en x, et multipliant le

numérateur et le dénominateur par $x - \sqrt{-1}.(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, on trouve

$$\frac{x - \sqrt{-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} - \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x};$$

en comprenant $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ dans la constante arbitraire, on parvient enfin à l'intégrale cherchée

$$-\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + C.$$

Exemple IV. $\int \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx}{2x^2}$. On opérera le plus commodément, en mettant $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = x.z$. (*Voyez* n° 62.)

Remarque. Le lecteur s'exercera encore sur les exemples suivans.

Exemple V. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Après avoir divisé le numérateur et le dénominateur de la différentielle par a, on pourra procéder d'après l'exemple I.

Les exemples suivans montrent qu'il faut transformer certaines différentielles, pour que leur intégrale se fasse trouver par la méthode que nous avons donnée dans ce numéro et le précédent.

Exemple VI. $\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}}$. Après avoir multiplié le numérateur et le dénominateur par..... $(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}$, on suivra le procédé des n°s 57, 63 et 64. (*Comparez* n° 62.)

Exemple VII. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$. On multipliera le numérateur et le dénominateur par $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Pour la continuation de l'opération, on comparera n° 63, exemple IV, et n° 64, exemple IV.

Intégration de la différentielle $x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$.

65. Nous avons considéré, dans le n° 62, deux cas, où la différentielle $x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$, m et n désignant des nombres entiers quelconques, et p une fraction, se peut rendre rationnelle et par conséquent intégrable, d'après ce qui précède. Tâchons maintenant de parvenir à l'intégration générale de la différentielle proposée, où l'on peut supposer, sans en diminuer la généralité, que p seul soit un nombre fractionnaire, mais m et n des nombres entiers; car si l'on avait, par exemple, la différentielle

$$x^{\frac{1}{3}}dx(a+bx^{\frac{1}{2}})^p,$$

on n'aurait qu'à mettre $x=z^6$. On obtiendrait par là

$$6z^7dz(a+bz^3)^p,$$

et m et n seront ainsi des nombres entiers.

D'abord il faut se rappeler, du calcul différentiel, que

$$d.uv=udv+vdu,$$

d'où il résulte

$$u.v=\int udv+\int vdu,$$

ou

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

C'est par cette formule qu'une intégrale proposée se

décompose en deux parties, dont la première est une fonction primitive, et la seconde une intégrale, qui s'obtiendra, dans certains cas, plus aisément que la proposée. A cause de la décomposition d'une intégrale en deux parties, cette méthode d'intégrer s'appelle *intégration par parties*. Nous l'appliquerons sur-le-champ à notre différentielle proposée.

Observons d'abord que cette différentielle peut se mettre sous la forme suivante :

$$x^{m-n}.x^{n-1}\mathrm{d}x(a+bx^n)^p;$$

faisant alors

$$x^{m-n}=u \quad \text{et} \quad x^{n-1}\mathrm{d}x(a+bx^n)^p=\mathrm{d}v,$$

d'où (n° 62, exemple I)

$$\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}=v,$$

on obtient, d'après la formule

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u,$$

(en mettant, pour abréger, X au lieu de $a+bx^n$),

$$\int x^{m-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^p$$
$$=\frac{x^{m-n}\mathrm{X}^{p+1}-(m-n)\int x^{m-n-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^{p+1}}{(p+1)nb}.$$

Or, on a

$$\int x^{m-n-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^{p+1}=\int x^{m-n-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^p.\mathrm{X}$$
$$=a\int x^{m-n-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^p+b\int x^{m-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^p;$$

ajoutant cette dernière intégrale à la correspondante, dans la formule précédente, on obtient

$$(\mathrm{A})\ldots\int x^{m-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^p=\frac{x^{m-n}\mathrm{X}^{p+1}-a(m-n)\int x^{m-n-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^p}{b(pn+m)}.$$

On ramène, de cette manière, l'exposant dans l'intégrale, hors de la parenthèse, de $m-1$ à $m-n-1$, et en continuant cette opération, à $m-2n-1$, etc.

Pour diminuer l'exposant de la parenthèse, on observera qu'on a

$$\int x^{m-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^p = \int x^{m-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^{p-1}.\mathrm{X} = a\int x^{m-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^{p-1} + b\int x^{m+n-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^{p-1},$$

et que la formule (A), en y changeant m en $m+n$, et p en $p-1$, donne

$$\int x^{m+n-1}\mathrm{d}x.\mathrm{X}^{p-1} = \frac{x^m\mathrm{X}^p - am\int x^{m-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^{p-1}}{b(pn+m)}.$$

En réunissant ces deux formules, on trouve

$$(\mathrm{B})\ldots\int x^{m-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^p = \frac{x^m\mathrm{X}^p + pna\int x^{m-1}\mathrm{d}x\mathrm{X}^{p-1}}{pn+m}.$$

Il sera bon de montrer, dans un exemple, comment il faut appliquer successivement les formules (A) et (B), pour parvenir à une intégrale proposée. Soit à intégrer

$$\int x^6\mathrm{d}x\mathrm{X}^{\frac{3}{2}}, \quad \text{où} \quad \mathrm{X} = a + bx^2.$$

On a successivement, d'après la formule (A),

$$\int x^6\mathrm{d}x\mathrm{X}^{\frac{3}{2}} = \frac{x^5}{10b}\mathrm{X}^{\frac{5}{2}} - \frac{a}{2b}\int x^4\mathrm{d}x\mathrm{X}^{\frac{3}{2}},$$

$$\int x^4\mathrm{d}x\mathrm{X}^{\frac{3}{2}} = \frac{x^3}{8b}\mathrm{X}^{\frac{5}{2}} - \frac{3a}{8b}\int x^2\mathrm{d}x\mathrm{X}^{\frac{3}{2}},$$

$$\int x^2\mathrm{d}x\mathrm{X}^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{6b}\mathrm{X}^{\frac{5}{2}} - \frac{a}{6b}\int \mathrm{d}x\mathrm{X}^{\frac{3}{2}};$$

d'après la formule (B), on a successivement

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{X}^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{4}\mathrm{X}^{\frac{3}{2}} + \frac{3a}{4}\int \mathrm{d}x\mathrm{X}^{\frac{1}{2}},$$

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{X}^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{2}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{X}^{\frac{1}{2}}};$$

or, on a, d'après le n° 63, exemple I,

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{b}} \log\left(2\sqrt{b}X^{\frac{1}{2}} - 2bx\right) + C,$$

ou (en comprenant $\frac{-1}{\sqrt{b}} \log 2\sqrt{b}$ dans la constante arbitraire)

$$= -\frac{1}{\sqrt{b}} \log\left(X^{\frac{1}{2}} - \sqrt{b}.x\right) + C.$$

En substituant cette expression dans la dernière formule, puis la valeur trouvée dans la précédente, et ainsi de suite, on obtient enfin, pour l'intégrale cherchée,

$$\int x^5 dx X^{\frac{3}{2}} = \frac{x^5}{10b} X^{\frac{5}{2}} - \frac{ax^3}{16b^2} X^{\frac{5}{2}} + \frac{3a^2x}{2.48b^3} X^{\frac{5}{2}} - \frac{3a^3x}{16.24b^3} X^{\frac{3}{2}}$$
$$- \frac{9a^4x}{3.16^2b^3} X^{\frac{1}{2}} + \frac{9a^5}{3.16^2b^3\sqrt{b}} \log\left(X^{\frac{1}{2}} - \sqrt{b}.x\right) + C.$$

Si, dans la différentielle proposée, m et p étaient négatifs, les formules (A) et (B) augmenteraient les exposans, au lieu de les diminuer. Dans ce cas, on opérera de la manière suivante : on tire de (A)

$$\int x^{m-n-1} dx X^p = \frac{x^{m-n} X^{p+1} - b(m+np)\int x^{m-1} dx X^p}{a(m-n)};$$

en y substituant $m+n$ au lieu de m, il vient

$$\text{(C)}\ldots \int x^{m-1} dx X^p = \frac{x^m X^{p+1} - b(m+n+np)\int x^{m+n-1} dx X^p}{am}.$$

De même, on tire de (B)

$$\int x^{m-1} dx X^{p-1} = \frac{-x^m X^p + (m+np)\int x^{m-1} dx X^p}{pna};$$

en y mettant $p+1$ au lieu de p, il vient

$$(D)\ldots\int x^{m-1}dx X^p = \frac{-x^m X^{p+1} + (m+n+np)\int x^{m-1}dx X^{p+1}}{(p+1)na}.$$

Pour appliquer les formules (C) et (D), on propose d'intégrer

$$\int x^{-4}dx(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

On ramènera cette intégrale, par la formule (C), successivement à celles-ci :

$$\int x^{-2}dx(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \int dx(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}},$$

et pour la dernière intégrale, la formule (D) donne

$$\frac{x(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}}{a}.$$

En rassemblant les résultats trouvés, on trouvera

$$\int x^{-4}dx(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}}{3a}.\left(-x^{-3}+\frac{4b}{a}x^{-1}+\frac{8b^2x}{a^2}\right)+C.$$

Le lecteur fera bien de s'exercer encore sur l'intégration de la formule

$$\int \frac{x^n dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

où il mettra pour n successivement tous les nombres entiers, tant positifs que négatifs, zéro y compris. Les diverses intégrales qui en résultent se ramèneront, par les formules (A) et (C), aux trois suivantes :

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{arc}\,(\sin = x) + C \quad (\textit{voyez}\ \text{n}^\circ\ 64),$$

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{C} \text{ (voyez n° 62)},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\log\left[\frac{1+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\right] + \mathrm{C} \text{ (voy. n° 64, ex. II)}.$$

Remarque. Lorsque, dans les formules (A), (B), (C), (D), le dénominateur s'évanouit, et que la valeur de l'intégrale devient par là infinie, la différentielle proposée est un monome, ou un binome irrationnel, mais intégrable par le moyen des substitutions indiquées n° 62.

Exemple. $\int x^{-4}\mathrm{d}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$.

66. Il est quelquefois possible de ramener la différentielle

$$x^{m-1}\mathrm{d}x(a+bx^n+cx^{2n})^p,$$

où m et n sont des nombres entiers et p une fraction, à une série finie de différentielles irrationnelles binomes de la forme considérée au numéro précédent. En mettant, pour cet effet, $x^n = z - \frac{b}{2c}$, on ramènera, sans peine, la quantité $a + bx^n + cx^{2n}$ à la forme $a' + cz^2$, et par là la différentielle proposée, à celle-ci :

$$\frac{1}{n}\left(z-\frac{b}{2c}\right)^{\frac{m}{n}-1}\mathrm{d}z\,(a'+cz^2)^p.$$

Si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier, la différentielle proposée se ramène, d'après ce qui a été dit ci-dessus, à la forme

$$\mathrm{A}z^k\mathrm{d}z(a'+cz^2)^p.$$

Exemple. Soit proposé $\int \mathrm{d}x(a+bx+cx^2)^{\frac{5}{2}}$.

Mettant ici $x = z - \frac{b}{2c}$, l'intégrale se transforme en

$$\int dz\left(a - \frac{b^2}{4c} + cz^2\right)^{\frac{5}{2}}.$$

Cette intégrale se ramène, par la formule (B) du numéro précédent, à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}}},$$

que nous avons traitée n° 63.

Traitons maintenant la différentielle

$$x^{m-1}dx(a + bx^n + cx^{2n})^p,$$

que nous écrirons, pour abréger,

$$x^{m-1}dx X^p,$$

d'après la formule d'intégration déjà appliquée au n° 65, $\int u dv = uv - \int v du$. En mettant $x^{m-1}dx = dv$ et $X^p = u$, il vient

$$\int x^{m-1}dx X^p = \frac{x^m}{m} X^p - \frac{p}{m}\int x^m . X^{p-1}dX.$$

Or, on a

$$\int x^{m-1}\, dx X^p = a\int x^{m-1}dx X^{p-1} + b\int x^{m+n-1}dx X^{p-1} + c\int x^{m+2n-1}dx X^{p-1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et développant ensuite $\int x^{m+2n-1}dx X^{p-1}$, on obtient

$$\int x^{m+2n-1}dx X^{p-1} = \frac{x^m X^p - (m+pn)b\int x^{m+n-1}dx X^{p-1} - am\int x^{m-1}dx X^{p-1}}{c(m+2pn)}$$

Mettant ici $p + 1$ au lieu de p, et m au lieu de $m + 2n$, on

trouve enfin

$$\int x^{m-1}dxX^p =$$

$$\frac{x^{m-2n}X^{p+1} - (m-n+pn)b\int x^{m-n-1}dxX^p - a(m-2n)\int x^{m-2n-1}dxX^p}{c(m+2pn)}.$$

Au moyen de cette formule, l'intégrale $\int x^{m-1}dxX^p$ se ramène aux intégrales

$$\int x^{m-n-1}dxX^p \quad \text{et} \quad \int x^{m-2n-1}dxX^p,$$

dans lesquelles l'exposant hors de la parenthèse est devenu moindre de n et de $2n$.

Aussi, pourra-t-on, ainsi que dans le n° 65, ramener l'intégrale proposée à d'autres intégrales où l'exposant de la parenthèse est diminué. On obtiendra ainsi, pour l'intégrale proposée, quatre formules tout-à-fait analogues à celles que nous avons développées n° 65.

On ramènera de plus, par la même opération, l'intégrale $\int x^{m-1}dxX^p$, où $X = a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n}$ aux trois intégrales suivantes,

$$\int x^{m-n-1}dxX^p, \quad \int x^{m-2n-1}dxX^p \quad \text{et} \quad \int x^{m-3n-1}dxX^p.$$

De l'Intégration par les séries.

67. Nous avons traité jusqu'ici des formules par lesquelles l'intégrale de certaines différentielles irrationnelles se peut trouver sous une expression finie. Cependant, il y a beaucoup de différentielles irrationnelles dont l'intégrale ne s'obtient pas par les formules rapportées, mais seulement par le développement de la différentielle en une série infinie, dont on intègre chaque terme en particulier.

Soit à intégrer par exemple, $\int x^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$.

On a (16)

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \ldots;$$

multipliant chaque terme par $x^{\frac{1}{2}}\,dx$, on obtiendra (57)

$$\int x^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int \frac{x^{\frac{5}{2}}\,dx}{2} - \int \frac{x^{\frac{9}{2}}\,dx}{8} - \int \frac{x^{\frac{13}{2}}\,dx}{16} \ldots$$

cherchant l'intégrale de chaque différentielle séparément, d'après le n° 62, on trouve enfin

$$\int x^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{4.11}x^{\frac{11}{2}} - \frac{1}{8.15}x^{\frac{15}{2}} - \ldots + C,$$

où C représente la somme de toutes les constantes qu'il faut ajouter à chaque intégrale en particulier (57).

On voit aisément que l'intégration par le moyen d'une série infinie n'est qu'une intégration approchée; car on ne prend pour l'intégrale cherchée que quelques-uns des premiers termes de la série, supposé cependant que la série soit convergente. C'est le cas dans l'exemple précédent, si l'on prend pour x une fraction moindre que l'unité.

Le lecteur s'exercera sur les exemples suivans.

Exemple I. Soit à intégrer $\int \frac{dx(1-e^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$. On développera d'abord $(1-e^2x^2)^{\frac{1}{2}}$ en série, et l'on intégrera ensuite, après avoir multiplié chaque terme par $\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, d'après la formule $\int \frac{x^n dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, traitée n° 65. Ordonnant la série cherchée suivant les puissances de e, et désignant, pour abréger, arc(sin $= x$) par A, on trouvera

$$\int \frac{dx(1-e^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = A + \frac{e^2}{2}\left[\frac{x}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{A}{2}\right]$$

$$+ \frac{1}{2}.\frac{1}{4}e^4\left[\left(\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}x\right)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.A\right] + \ldots + C.$$

Cette série sera convergente lorsque e est une quantité fort petite.

Exemple II. Soit à intégrer $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(a+x)^{\frac{1}{2}}}$.

On développera $\frac{1}{(a+x)^{\frac{1}{2}}}$ en série.

Appliquons encore l'intégration par les séries à quelques différentielles dont l'intégrale s'obtient aussi sous une expression finie.

On trouve ainsi pour $\int \frac{dx}{1+x}$, en développant... $\frac{1}{1+x}$ en série,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + C.$$

Or, l'intégrale cherchée est aussi $= \log(1+x)$ (n° 60). On a donc

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + C.$$

En mettant aux deux membres de l'équation $x = 0$, il vient $C = \log 1 = 0$. Il en résulte que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

comme nous avons trouvé au n° 21.

On intégrera de la même manière $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, en développant $\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ en série. En observant, pour la détermination de la constante, que dans le cas où $x=0$, $\sin x$ aussi bien que arc $(\sin = x)$ s'évanouissent, on tombe sur la série donnée pour arc $(\sin = x)$ au n° 31.

On obtient de même, pour $\int \frac{dx}{1+x^2}$, la série pour arc $(\tang = x)$ donnée au n° 31.

Le lecteur développera sans difficulté ces deux expressions.

De l'Intégration des différentielles transcendantes.

68. Parmi les différentielles transcendantes, considérons d'abord les différentielles exponentielles et logarithmiques.

Premièrement, soit à intégrer $\int Pa^x dx$. En mettant pour a^x la série développée n° 19, on aura

$$\int Pa^x dx = \int Pdx + \frac{\log a}{1} \int Px dx + \frac{(\log a)^2}{1.2} \int Px^2 dx + \ldots$$

Ainsi, lorsque P est une fonction algébrique de x, l'intégrale transcendante proposée dépend de l'intégration des différentielles algébriques.

Soit pour exemple, $P = x^n$. L'intégration de chaque terme de la série s'effectuera aisément par le n° 58; on aura

$$\int a^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}.\log a}{1.(n+2)} + \frac{x^{n+3}(\log a)^2}{1.2.(n+3)} + \ldots + C,$$

série qui sera évidemment convergente lorsque n est positif et > 1, et en même temps $x < 1$.

Soit maintenant $P = \frac{1}{x}$; on aura

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \log x + \frac{x.\log a}{1} + \frac{x^2.(\log a)^2}{1.2.2} + \frac{x^3.(\log a)^3}{1.2.3.3} + \ldots + C;$$

faisant $a^x = z$, d'où $x = \frac{\log z}{\log a}$, $dx = \frac{dz}{\log a.z}$

et

$$\log x = \log(\log z) - \log(\log a),$$

on trouve

$$\int \frac{dz}{\log z} = \log(\log z) + \log z + \frac{1}{2}.\frac{(\log z)^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{(\log z)^3}{1.2.3} + \ldots + C.$$

Le lecteur s'exercera encore sur les exemples suivans.

Soit $P = \frac{1}{x^n}$ et $P = \frac{x}{1+x}$.

On peut aussi décomposer la différentielle proposée $Pa^x dx$ en deux facteurs $a^x dx$ et P. Comme on a (18)

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a},$$

il vient, au moyen de l'intégration par parties (65),

$$\int Pa^x dx = \frac{1}{\log a}.Pa^x - \frac{1}{\log a}\int a^x dP.$$

En mettant successivement $dP = Qdx$, $dQ = Rdx$, etc., on aura

$$\int Pa^x dx = \frac{1}{\log a}.Pa^x - \frac{1}{(\log a)^2}.Qa^x + \frac{1}{(\log a)^3}.Ra^x - \ldots \pm \frac{1}{(\log a)^n}\int Va^x dx,$$

en sorte que le dernier terme est affecté du signe positif si n est impair, et du signe négatif si n est pair. Cette formule est applicable lorsque P est une fonction algébrique

rationnelle entière, car V peut alors être constant; donc

$$\int Va^x dx = V\int a^x dx = \frac{Va^x}{\log a}.$$

Si, par exemple, $P = x^n$, on a

$$\int x^n a^x dx = \frac{a^x}{\log a}\left[x^n - \frac{n}{\log a}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(\log a)^2}x^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{(\log a)^n}\right] + C.$$

Mais si, dans la différentielle proposée $Pa^x dx$, P est une fonction algébrique rationnelle et fractionnaire, on décomposera $Pa^x dx$ dans les deux facteurs Pdx et a^x. Faisant ensuite successivement

$$\int Pdx = Q, \quad \int Qdx = R, \quad \int Rdx = S, \text{ etc.},$$

on obtient

$$\int Pa^x dx = a^x Q - \log a . a^x R + (\log a)^2 a^x S - \ldots \pm (\log a)^n \int Va^x dx + C$$

Soit, par exemple,

$$P = \frac{1}{x^n}; \text{ on a } Q = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}, \; R = \frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}, \text{etc.},$$

donc

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = \frac{-a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x \log a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \ldots$$
$$+ \frac{(\log a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{a^x dx}{x} + C.$$

L'intégrale $\int \frac{a^x dx}{x}$, à laquelle se ramène la proposée, a été traitée ci-dessus.

Pour intégrer la différentielle logarithmique $Pdx(\log x)^n$, si n est un nombre entier et positif, et P une fonction algébrique rationnelle et entière de x, on mettra $\int Pdx = Q$;

on aura donc, par l'intégration par parties (65),

$$\int P dx\,(\log x)^n = Q.(\log x)^n - n\int \frac{Q dx}{x}\,(\log x)^{n-1};$$

soit de plus

$$\int \frac{Q dx}{x} = R, \quad \int \frac{R dx}{x} = S, \text{ etc.};$$

on obtiendra ainsi

$$\int P dx (\log x)^n = Q.(\log x)^n - nR(\log x)^{n-1} + n(n-1)S.(\log x)^{n-2} - \ldots$$

Soit, par exemple, $P = x^m$.
On obtient

$$\int x^m dx (\log x)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[(\log x)^n - \frac{n}{m+1}(\log x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}(\log x)^{n-2} - \ldots\right] + C.$$

Si $m = -1$, cette série ne saurait plus servir; mais on aura alors pour l'intégrale proposée $\int \frac{dx}{x}.(\log x)^n$.

Faisant ici $\log x = z$, d'où $\frac{dx}{x} = dz$,

on aura

$$\int dz.z^n = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(\log x)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Si n est un nombre négatif ou fractionnaire, on ne peut faire usage de la série développée ci-dessus. Pour avoir, dans ce cas, une série plus applicable, on se conduira de la manière suivante.

On décomposera la différentielle proposée $P dx (\log x)^{-n}$

dans les deux facteurs Px et $\frac{dx}{x}\log x^{n-1}$, dont le dernier a pour intégrale $\frac{-1}{(n-1)(\log x)^{n-1}}$;

on a alors

$$\int\frac{Pdx}{(\log x)^n}=\frac{-Px}{(n-1)(\log x)^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{1}{\log x^{n-1}}d(Px);$$

faisant maintenant successivement

$$d(Px)=Qdx,\quad d(Qx)=Rdx,\ \text{etc.},$$

on obtient

$$\int\frac{Pdx}{(\log x)^n}=\frac{-Px}{(n-1)(\log x)^{n-1}}-\frac{Qx}{(n-1)(n-2)(\log x)^{n-2}}+C$$

Soit, par exemple, $P=x^m$;

on aura

$$\int\frac{x^m dx}{(\log x)^n}=\frac{-x^{m+1}}{(n-1)(\log x)^{n-1}}-\frac{(m+1).x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(\log x)^{n-2}}$$
$$-\frac{(m+1)^2.x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(\log x)^{n-3}}-\ldots$$
$$+\frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int\frac{x^m dx}{\log x}+C;$$

faisant dans cette dernière intégrale $x^{m+1}=z$, on aura

donc $x^m dx=\frac{dz}{m+1}$, $\log x=\frac{\log z}{m+1}$;

$$\int\frac{x^m dx}{\log x}=\int\frac{dz}{\log z},$$

intégrale que nous avons déjà traitée ci-dessus.

Si l'on prend $\qquad P = x^{-1}$,

il vient

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^n} = \frac{-1}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + C.$$

Cette expression ne donne rien lorsque $n = 1$. Mais, dans ce cas, l'intégrale proposée se change en $\int \frac{dx}{x \log x}$. Si l'on fait ici $\log x = u$, d'où $\frac{dx}{x} = du$,

il vient

$$\int \frac{du}{u} = \log u = \log(\log x) + C.$$

69. Traitons maintenant l'intégration des fonctions circulaires.

Soit d'abord à intégrer $\int X dx . \text{arc}(\sin = x)$. Si l'on y prend $\int X dx = v$, il vient, à cause de

$$d.\text{arc}(\sin = x) = \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (28),$$

par le moyen de l'intégration par parties (65),

$$\int X dx . \text{arc}(\sin = x) = v . \text{arc}(\sin = x) - \int \frac{v dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi, l'intégration de la différentielle transcendante proposée se ramène à celle d'une différentielle algébrique, supposé que $\int X dx = v$ soit algébrique.

Soit à intégrer, par exemple, $\int x^n dx . \text{arc}(\sin = x)$,

on a

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ et } \int x^n dx . \text{arc}(\sin = x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} . \text{arc}(\sin = x)$$
$$- \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

pour la dernière intégrale, *voyez* n° 65.

Comme (28)

$$d.\text{arc}(\cos = x) = \frac{-dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ et } d.\text{arc}(\text{tang} = x) = \frac{dx}{1+x^2},$$

on trouve, en opérant de la même manière qu'auparavant,

$$\int X dx.\text{arc}(\cos = x) = v.\text{arc}(\cos = x) + \int \frac{v dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et

$$\int X dx.\text{arc}(\text{tang} = x) = v.\text{arc}(\text{tang} = x) - \int \frac{v dx}{1+x^2}.$$

Si z représente un arc dont le sinus ou le cosinus, ou la trngente soient exprimés en fonction de x, c'est-à-dire qu'on ait $dz = Pdx$; P étant une fonction de x, on pourra trouver $\int Xz^n dx$ par un procédé semblable à celui qui précède. Soit $\int X dx = v$,
on aura

$$\int z^n X dx = v.z^n - n\int v z^{n-1} dz,$$

ou, en mettant à la place de dz la valeur supposée ci-dessus,

$$\int z^n X dx = v.z^n - n\int z^{n-1} v P dx.$$

En suivant cette marche, on abaissera de plus en plus l'exposant de z, et l'on parviendra enfin à faire disparaître tout-à-fait l'arc z, si n est un nombre positif et entier.

Soit, par exemple, $X = 1$, et en même temps,

$$z = \text{arc}(\sin = x);$$

on a alors

$$\int z^n dx = z^n x + nz^{n-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - n(n-1)z^{n-2}x$$
$$-n(n-1)(n-2)z^{n-3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \ldots + C.$$

70. On a, par le n° 27 (*remarque*),

$$d.\sin nx = ndx.\cos nx \quad \text{et} \quad d.\cos nx = -ndx.\sin nx;$$

il en résulte

$$\int dx.\cos nx = \frac{1}{n}\sin nx + C,$$

et

$$\int dx.\sin nx = -\frac{1}{n}\cos nx + C.$$

Soit à intégrer maintenant $\int dx(\sin x)^2$. On a, comme on sait, $(\sin x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$; l'intégrale proposée devient par là

$$= \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{dx.\cos 2x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.\sin 2x + C.$$

Dans cet exemple, le carré du sinus est exprimé par le cosinus du double arc, pour obtenir l'intégrale proposée. C'est pour le même but qu'il faut généralement exprimer les puissances entières du sinus et du cosinus, par les sinus et les cosinus des arcs multiples. Développons pour cela maintenant les expressions, tant pour les puissances entières des sinus et des cosinus par les sinus et les cosinus des arcs multiples, que *vice versâ* pour les sinus et les cosinus des arcs multiples par les puissances entières des sinus et des cosinus de l'arc simple.

On a, par le n° 33,

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}.\sin x,$$

d'où, d'après le n° 64,

$$(e^{x\sqrt{-1}})^n = e^{nx.\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^n,$$

et aussi, en mettant nx à la place de x,

$$e^{nx.\sqrt{-1}} = \cos nx + \sqrt{-1}.\sin nx;$$

on a donc

$$\cos nx + \sqrt{-1}.\sin nx = (\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^n.$$

De même, on a

$$\cos nx - \sqrt{-1}.\sin nx = (\cos x - \sqrt{-1}.\sin x)^n.$$

En ajoutant ensemble ces deux équations, et en les retranchant ensuite l'une de l'autre, on obtient

$$\cos nx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^n + (\cos x - \sqrt{-1}.\sin x)^n}{2},$$

$$\sin nx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1}.\sin x)^n}{2.\sqrt{-1}};$$

or on a, par les n°s 16 et 33,

$$(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^n = \cos x^n + \frac{n.\sqrt{-1}}{1}.\cos x^{n-1}.\sin x$$
$$- \frac{n(n-1)}{1.2}\cos x^{n-2}\sin x^2 - \ldots$$

et

$$(\cos x - \sqrt{-1}.\sin x)^n = \cos x^n - \frac{n.\sqrt{-1}}{1}.\cos x^{n-1}.\sin x$$
$$- \frac{n(n-1)}{1.2}\cos x^{n-2}\sin x^2 + \ldots$$

Substituant ces valeurs dans les expressions ci-dessus, il vient donc

$$\cos nx = \cos x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos x^{n-2}\sin x^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos x^{n-4}\sin x^4 - \ldots;$$

$$\sin nx = \frac{n}{1}\cos x^{n-1}\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos x^{n-3}\sin x^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos x^{n-5}\sin x^5 - \ldots;$$

mettons, de plus,

$$\cos x + \sqrt{-1}.\sin x = u, \quad \text{et} \quad \cos x - \sqrt{-1}.\sin x = v;$$

de là

$$\cos x = \frac{1}{2}(u+v), \qquad \sin x = \frac{1}{2.\sqrt{-1}}(u-v),$$

et

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}(u+v)^n,$$

ou en développant la puissance d'après le n° 16,

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left[u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{n-3}v^3 + \ldots\right],$$

et puisqu'on peut, dans l'expression $(u+v)^n$, changer v en u, et réciproquement, on aura aussi

$$\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left[v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}v^{n-2}u^2 + \ldots\right];$$

ajoutant ensemble ces deux expressions, il vient

$$2.\cos x^n = \frac{1}{2^n}\left[u^n + v^n + \frac{n}{1}(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{1.2}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2)\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3) + \ldots\right],$$

ou aussi

$$2^{n+1}\cos x^n = u^n + v^n + \frac{n}{1}uv(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4}) + \ldots;$$

or, nous avons trouvé précédemment

$$\cos nx = \frac{1}{2}(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^n + \frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{-1}.\sin x)^n$$
$$= \frac{1}{2}u^n + \frac{1}{2}v^n;$$

donc,

$$u^n + v^n = 2\cos nx,$$

et en général,

$$u^{n-m} + v^{n-m} = 2\cos(n-m)x.$$

De plus, on a $uv = 1$ (*voyez* n° 33); il vient donc

$$2^{n+1}\cos x^n = 2\cos nx + \frac{2n}{1}\cos(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x$$
$$+ \frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)x + \ldots,$$

ou, en divisant par 2,

$$2^n\cos x^n = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)x + \ldots \quad (A).$$

Dans le cas où n est un nombre pair, on arrive à un terme moyen qui renferme $\cos 0 = 1$; le terme qui le précède renferme $\cos[n-(n-2)]x = \cos 2x$, et celui qui le suit $\cos[n-(n+2)]x = \cos -2x = \cos 2x$; ces deux termes ont encore le même coefficient, comme le fait voir la formule du binome pour les puissances entières. On voit aisément, de la même manière, que les termes placés à égale distance des extrêmes ont le même coefficient et le cosinus du même arc. On n'aura donc qu'à prendre le double des termes qui précèdent le terme moyen, en omettant tous ceux qui le suivent; le terme moyen lui-même, dégagé du cosinus, ne doit pas être doublé.

Mais si n est un nombre impair, il y aura deux termes au milieu, dont l'un contient $\cos x$, et l'autre..... $\cos -x = \cos x$. Ces deux termes, ayant en outre le même coefficient, sont égaux l'un à l'autre. Pareille chose aura lieu dans tous les termes qui sont également éloignés des extrêmes de la série. On n'aura donc, dans ce cas, qu'à prendre le double des termes qui renferment des cosinus d'arcs positifs, en omettant les autres qui renferment des cosinus d'arcs négatifs.

Soit, par exemple, $n = 4$. En prenant le double des termes qui précèdent le terme moyen, mais en ne doublant pas le terme moyen lui-même, et omettant les termes suivans, il viendra, après avoir divisé toute la série par 2,

$$8.\cos x^4 = \cos 4x + 4.\cos 2x + 3.$$

Soit, de plus, $n = 5$. En ne considérant que les termes renfermant des cosinus d'arcs positifs, il vient, en prenant le double de ces termes, et divisant toute la série par 2,

$$16.\cos x^5 = \cos 5x + 5.\cos 3x + 10\cos x.$$

Pour obtenir de même une série pour $\sin x^n$, on observera qu'on a, par ce qui précède,

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u - v);$$

d'où

$$\sin x^n = \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n}(u-v)^n = \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n}\left[u^n - \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{n-3}v^3 + \ldots\right].$$

Soit d'abord n un nombre pair; on a alors

$$(u-v)^n = (v-u)^n \quad \text{et} \quad \sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}(v-u)^n.$$

En développant cette dernière expression, et en l'ajoutant à la série précédente, il vient

$$2\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left[u^n + v^n - \frac{n}{1}uv(u^{n-2} + v^{n-2})\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4}) - \ldots\right],$$

ou, d'après ce qui précède,

$$(2\sqrt{-1})^n . \sin x^n = \cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x - \ldots$$

Mais n étant un nombre pair, on a $(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n$, où le signe $+$ a lieu si n est un multiple de 4, et le signe $-$ si n est un multiple de 2 (comparez n° 33). On a donc

$$\pm 2^n . \sin x^n = \cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)x + \ldots \quad (B).$$

On voit aisément, d'après les remarques faites sur la série (A), qu'il suffit de prendre le double des termes qui précèdent le terme moyen, en omettant ceux qui le suivent; le terme moyen lui-même ne doit pas se doubler. On obtient, par exemple, pour $n = 4$, en divisant toute la série par 2,

$$8.\sin x^4 = \cos 4x - 4.\cos x + 3.$$

Mais si n est un nombre impair, on aura

$$(v - u)^n = -(u - v)^n,$$

$$\sin x^n = \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n}.(u-v)^n = \frac{-1}{(2\sqrt{-1})^n}(v-u)^n$$

$$= \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n}.\left[-v^n + \frac{n}{1}v^{n-1}u - \frac{n(n-1)}{1.2}v^{n-2}u^2 + \ldots\right];$$

en ajoutant cette expression au développement ci-dessus donné de $\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}.(u-v)^n$, il vient

$$2.\sin x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left[u^n - v^n - \frac{n}{1}uv(u^{n-2} - v^{n-2})\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4} - v^{n-4}) - \ldots\right];$$

or, on a par ce qui précède,

$$\sin nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}[(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1}.\sin x)^n]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u^n - v^n);$$

il en résulte généralement

$$u^{n-m} - v^{n-m} = 2.\sqrt{-1}.\sin(n-m)x;$$

on a en outre $uv = 1$. De plus, lorsque n est un nombre impair, on a $(2.\sqrt{-1})^{n-1} = \pm 2^{n-1}$, où le signe positif a lieu lorsque $n-1$ est un multiple de 4, et le signe négatif lorsque $n-1$ est un multiple de 2 (n° 33). Il vient donc

$$\pm 2^n.\sin x^n = \sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sin(n-6)x + \ldots \quad (C).$$

D'après les remarques précédentes, il n'est besoin que

de prendre le double des termes qui renferment les sinus des arcs positifs, en omettant les sinus des arcs négatifs.

Soit, pour exemple, $n=5$; on obtient, après avoir divisé toute la série par 2,

$$16.\sin x^5 = \sin 5x - 5.\sin 3x + 10.\sin x.$$

Par le moyen de ces trois séries, (A), (B), (C), nous pourrons trouver, sous une expression finie, l'intégrale des différentielles qui renferment les puissances entières des sinus et des cosinus.

Exemple I. Soit proposé $\int dx.\cos x^4$; nous avons trouvé ci-dessus

$$\cos x^4 = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

On a donc

$$\int dx.\cos x^4 = \frac{1}{8}\int dx \cos 4x + \frac{1}{2}\int dx \cos 2x + \frac{3}{8}\int dx =$$

(d'après ce qui a été dit au commencement de ce numéro)

$$\frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C.$$

Exemple II. $\int dx.\sin x^4$. En opérant de la même manière, on trouve pour l'intégrale

$$\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C.$$

71. On parvient aussi à l'intégrale $\int dx.\sin x^m$, où m est un nombre entier, en mettant $\sin x = z$, d'où.... $dx = \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$. L'intégrale proposée devient par là..

$\int dz.z^m(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$, sur laquelle on opérera d'après le n° 65 (A).

On obtient ainsi, par exemple, si $m=4$, le même résultat pour $\int dx \sin x^4$, qu'on a trouvé au bout du numéro précédent.

On changera de la même manière $\int dx \cos x^m$, par la substitution de $\cos x = z$, en $-\int dz.z^m(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$, et l'on opérera ensuite d'après le n° 65.

En mettant de la même manière $\operatorname{tang} x = z$ dans $\int dx.\operatorname{tang} x^m$, on trouvera $\int \frac{z^m dz}{1+z^2}$, intégrale déjà traitée n° 59, où m est supposé un nombre entier.

Exemple I. $\int dx.\operatorname{tang} x^4$. On obtient pour cela $\int \frac{z^4 dz}{1+z^2}$.

Or, on a

$$\frac{z^4}{1+z^2} = z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2};$$

donc l'intégrale cherchée est

$$= \frac{z^3}{3} - z + \text{arc}\,(\text{tang} = z),$$

ou, à cause que $\text{arc}\,(\text{tang} = z) = x$,

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tang} x^3 - \operatorname{tang} x + x + C.$$

Pour intégrer $dx.\sin x^m.\cos x^n$, il faudra faire $\sin x = z$; de là

$$\cos x = (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad dx = dz\,(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

La différentielle proposée devient par là

$$z^m dz(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

qu'on traitera d'après le n° 65.

Exemple II. $\int dx . \sin x^4 . \cos x^2$. On obtient pour l'intégrale

$$-\frac{1}{6}\sin x^3 . \cos x^3 - \frac{1}{8}\sin x . \cos x^3 + \frac{1}{16}\sin x . \cos x + \frac{1}{16} x + C.$$

Exemple III. $\int \frac{dx . \sin x^4}{\cos x^2}$.

De la Quadrature et de la Rectification des courbes.

72. Nous avons vu au n° 55 que la différentielle de l'aire d'une courbe rapportée aux coordonnées rectangles, est $=ydx$, où y représentant l'ordonnée est exprimé, moyennant l'équation de la courbe, seulement par la variable x. Donc, pour trouver l'aire d'une courbe dont l'équation est connue, ou, comme on s'exprime aussi, pour parvenir à sa *quadrature* (quoique la stricte acception de ce terme se borne aux courbes dont l'aire se peut mettre sous une expression algébrique), il faut intégrer la différentielle ydx, qui ne renferme que la variable x, par les méthodes que nous avons traitées jusqu'ici. D'après cela, on exprimera tout généralement l'*intégrale de l'aire* par

$$\int ydx = X + C,$$

où X représente l'intégrale trouvée, et C la constante arbitraire qu'il faut ajouter (n° 57) à toute intégrale complète.

Mais si l'on veut exprimer une portion déterminée de l'aire, par exemple, celle entre les valeurs $x=x'$ et $x=x''$, il faudra mettre successivement ces valeurs de x dans l'intégrale complète et retrancher ensuite les résultats l'un de l'autre. On obtient ainsi, si X' et X'' représentent les valeurs de X pour $x=x'$, et $x=x''$, successivement $X'+C$ et $X''+C$, d'où résulte $X''-X'$, l'expression de l'aire cherchée, qu'on appelle pour cela l'*intégrale déterminée* ou *définie* de l'aire, pour la distinguer de l'intégrale complète, qui se nomme aussi *intégrale générale* ou *indéfinie* de l'aire.

La constante arbitraire de l'intégrale générale peut aussi être déterminée par une condition donnée de l'aire pour une valeur particulière de x. Soit donnée, par exemple, la

condition que l'aire soit $= A$ lorsque $x = x'$; l'intégrale générale donne par là

$$A = X' + C,$$

où X' représente la valeur de X pour $x = x'$; il en résulte la détermination $C = A - X'$. Cette valeur de C, substituée dans l'intégrale générale, donne

$$\int y dx = X + A - X'.$$

D'après ce qui précède, $X - X'$ représente la portion de l'aire comprise entre $x = x'$, et une valeur indéterminée de x; l'expression $X + A - X'$ représente donc la portion de l'aire entre la valeur de x, où l'aire commence à être comptée, et une valeur indéterminée de x; il s'ensuit qu'elle peut s'appeler de même l'*intégrale déterminée*, par rapport à l'une des limites qui est entièrement déterminée. On y pourra aussi déterminer ensuite l'autre limite, par exemple, pour $x = x''$. Dans la supposition que, lorsque $x = x''$, X devienne X'', on obtient $X'' + A - X'$ pour la portion de l'aire entre la valeur de x où l'aire commence à être comptée, et entre $x = x''$. Cette méthode donne ainsi, comme la première, une portion déterminée de l'aire, limitée de deux côtés, au-dessus de l'axe des abscisses.

Les exemples suivans mettront tout cela encore plus dans son jour.

73. *Exemple I.* Soit $y = ax + b$, l'équation de la ligne droite BQ (fig. 16), où A est l'origine des coordonnées. On a, pour l'intégrale générale de l'aire,

$$\int y dx = a\int x dx + b\int dx = \frac{ax^2}{2} + bx + C.$$

En y faisant successivement $x = 0$ et $x = AP = x'$, et retranchant ensuite le premier résultat du second, on ob-

tient pour l'aire du trapèze AMQP

$$\frac{ax'^2}{2} + bx'.$$

Au lieu de chercher l'intégrale déterminée de l'aire entre deux valeurs de x, on pourra supposer que l'aire soit $= 0$ au point d'intersection B (où, en vertu de l'équation..... $x = \frac{-b}{a}$), c'est-à-dire que l'aire y commence à être comptée.

On obtient ainsi, par l'intégrale générale,

$$\frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{a} + C = 0,$$

d'où

$$C = \frac{b^2}{2a};$$

l'intégrale déterminée pour la condition donnée sera donc

$$\int y dx = \frac{ax^2}{2} + bx + \frac{b^2}{2a},$$

expression qui donne, comme on a montré n° 72, la portion de l'aire comprise entre la valeur $x = -\frac{b}{a}$, c'est-à-dire entre le point B et une valeur indéterminée de x. En y mettant d'abord $x = 0$, il viendra

$$\text{triangle BAM} = \frac{b^2}{2a};$$

mettant ensuite $x = \text{AP} = x'$, il viendra

$$\text{triangle BPQ} = \frac{ax'^2}{2} + bx' + \frac{b^2}{2a}.$$

Retranchant le premier résultat du second, on obtient

$$\text{trapèze AMPQ} = \frac{ax'^2}{2} + bx',$$

comme nous avons trouvé ci-dessus.

Exemple II. Soit proposé de trouver l'aire de la section conique qui a pour équation rapportée au sommet et à ses axes,

$$y^2 = 2mx + nx^2.$$

On aura donc à intégrer $dx(2mx + nx^2)^{\frac{1}{2}}$. Cette différentielle se change par la substitution de $x = z - \frac{m}{n}$ en celle-ci : $dz\left(-\frac{m^2}{n} + nz^2\right)^{\frac{1}{2}}$. L'intégrale en est, d'après le n° 65 (B),

$$\frac{z}{2}\left(-\frac{m^2}{n} + nz^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m^2}{2n}\int\frac{dz}{\left(-\frac{m^2}{n} + nz^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'intégrale $\int\frac{dz}{\left(-\frac{m^2}{n} + nz^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ devient, en divisant par $\frac{m\sqrt{-1}}{n^{\frac{1}{2}}}$ le numérateur et le dénominateur,

$$= \int\frac{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{m.\sqrt{-1}}.dz}{\left(1 - \frac{n^2}{m^2}z^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\sqrt{-1}.n^{\frac{1}{2}}}{m}\int\frac{dz}{\left(1 - \frac{n^2}{m^2}z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$\left(\text{en multipliant et divisant par } \frac{m}{n}\right)$,

$$= -\frac{m}{n}\cdot\frac{\sqrt{-1}\,.\,n^{\frac{1}{2}}}{m}\int\frac{\frac{n}{m}\,dz}{\left(1-\frac{n^2}{m^2}z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-\sqrt{-1}}{n^{\frac{1}{2}}}\int\frac{\frac{n}{m}\,.\,dz}{\left(1-\frac{n^2}{m^2}z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= (\text{n}^{\text{o}}\ 28)\ \frac{-\sqrt{-1}}{n^{\frac{1}{2}}}\ \text{arc}\left(\sin = \frac{n}{m}\ z\right) + \text{C}.$$

On a donc, pour l'intégrale générale de l'aire,

$$\frac{z}{2}\left(-\frac{m^2}{n}+nz^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{m^2.\sqrt{-1}}{2n^{\frac{3}{2}}}\ \text{arc}\left(\sin=\frac{n}{m}z\right)+\text{C},$$

ou, en remettant la valeur de z en x,

$$\frac{\left(x+\frac{m}{n}\right)}{2}(2mx+nx^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{m^2.\sqrt{-1}}{2n^{\frac{3}{2}}}.\text{arc}\left(\sin=\frac{n}{m}x+1\right)+\text{C}.$$

Prenant dans cette intégrale générale successivement $x=0$, et $x=x'$, et retranchant ensuite le premier résultat du second, il vient

$$\frac{\left(x'+\frac{m}{n}\right)}{2}(2mx'+nx'^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{m^2\sqrt{-1}}{2n^{\frac{3}{2}}}\left[\text{arc}\left(\sin=\frac{n}{m}x'+1\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{\left(x'+\frac{m}{n}\right)}{2}(2mx'+nx'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{m^2.\sqrt{-1}}{2n^{\frac{3}{2}}}\ \text{arc.}\left(\cos=\frac{n}{m}\ x'+1\right),$$

l'intégrale déterminée s'exprimera donc aussi par

$$\frac{(x'+a)}{2}.\frac{b}{a}(2ax'+x'^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{ab}{2}\log\left[\frac{x'+a+(2ax'+x'^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right].$$

Soit, dans le cercle (fig. 11), le rayon $AO=m$, $AP=x'$, d'où

$$OP=m-x' \quad \text{et} \quad PM=(2mx'-x'^2)^{\frac{1}{2}};$$

donc

$$\text{triangle} \quad PMO=\frac{(m-x')}{2}.(2mx'-x'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On voit par là que la première partie de l'intégrale déterminée de l'aire du cercle que nous avons trouvée ci-dessus, prise du signe contraire, exprime le triangle PMO; et comme l'intégrale entière appartient à la portion APM de l'aire du cercle, il est évident que la seconde partie de l'intégrale, savoir $\frac{m^2}{2}\text{arc}\left(\cos=\frac{m-x'}{m}\right)$ convient au secteur de cercle AOM. Mais en faisant $AP'=x'$, on trouve aisément, par les mêmes raisonnemens, que la seconde partie de l'intégrale exprime le secteur de cercle AOM'.

On trouve de même dans l'ellipse (fig. 17) que la première partie de l'intégrale déterminée exprime le triangle POM ou le triangle P'OM', et la seconde le secteur AOM ou AOM', selon qu'on prend AP ou AP' pour x'.

Enfin, quant à l'hyperbole (fig. 14), on trouve que la première partie de l'intégrale exprime le triangle OPM, et puisque l'intégrale entière donne le segment APM, il s'ensuit que la seconde partie de l'intégrale, savoir

$$\frac{ab\sqrt{-1}}{2}\text{arc}\left(\cos=\frac{x'+a}{a}\right)$$

exprime le secteur OAM.

Enfin, en mettant $n=0$ dans l'équation $y=(2mx+nx^2)^{\frac{1}{2}}$, la courbe devient une *parabole* dont le paramètre $=2m$. Or, l'intégrale déterminée de l'aire de la section conique depuis $x=0$ jusqu'à $x=x'$, devient, en faisant $\frac{n}{m}=-p$,

$$=\frac{-p^{\frac{1}{2}}.m^{\frac{2}{2}}.x'^{\frac{1}{2}}(1-px')(2-px')^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{1}{2}}\operatorname{arc}(\cos=1-px')}{2p^{\frac{3}{2}}},$$

fraction qui donne $\frac{0}{0}$ pour $p=0$, c'est-à-dire lorsque $n=0$.

En faisant $1-px'=z$, d'où $p=\frac{1-z}{x'}$, il vient

$$\frac{-m^{\frac{1}{2}}.x'^{\frac{3}{2}}}{2}\left[\frac{z(1-z^2)^{\frac{1}{2}}-\operatorname{arc}(\cos=z)}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

La vraie valeur de cette fraction qui, lorsque $z=1$, devient $\frac{0}{0}$, est déjà trouvée n° 37, exemple 6. Il en résulte qu'on a pour l'aire cherchée de la parabole depuis le sommet jusqu'à l'abscisse x',

$$\frac{2^{\frac{3}{2}}.m^{\frac{1}{2}}x'^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

D'ailleurs, on trouve plus aisément l'aire de la parabole, en substituant dans $\int y\,dx$ la valeur de y, tirée de l'équation de la courbe $y^2=2mx$. On a alors

$$\int y\,dx=(2m)^{\frac{1}{2}}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2(2m)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3}+C.$$

On trouve, par conséquent, pour l'aire au-dessus de l'axe, à partir du sommet, où $x = 0$, jusqu'à l'abscisse x',

$$\frac{2^{\frac{3}{2}} . m^{\frac{1}{2}} . x'^{\frac{3}{2}}}{3},$$

le même résultat que ci-dessus.

Le rectangle AHMP (fig. 9) élevé au-dessus de l'abscisse AP a pour mesure AP.PM, ou [puisqu'en vertu de l'équation de la parabole, $PM = (2m)^{\frac{1}{2}} . AP^{\frac{1}{2}}$], $(2m)^{\frac{1}{2}} . AP^{\frac{3}{2}}$. Le rectangle AHMP est donc à l'aire parabolique appartenant à la même abscisse AP, comme $(2m)^{\frac{1}{2}} . AP^{\frac{3}{2}}$ est à

$$\frac{2(2m)^{\frac{1}{2}} . AP^{\frac{3}{2}}}{3},$$

c'est-à-dire comme 1 à $\frac{2}{3}$ ou comme 3 : 2. Il est encore visible que le triangle APM est à l'espace parabolique APMG comme $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$, ou comme 3 : 4; le segment parabolique AGM est donc la quatrième partie de l'espace parabolique APMG.

Exemple III. Prenons pour premier exemple de la quadrature des courbes rapportées aux coordonnées obliques, l'*hyperbole* rapportée à ses asymptotes (fig. 14), dont l'équation est $yx = p^2$. On a ici (55) pour l'intégrale de l'aire $\int y . \sin \omega dx$, où ω désigne l'angle compris entre les axes des coordonnées, dans notre cas, entre les asymptotes. On trouve ainsi

$$p^2 . \sin \omega . \int \frac{dx}{x} = p^2 . \sin \omega . \log x + C.$$

Menant du sommet de l'hyperbole A, la ligne AB parallèle

à l'asymptote OY, on a, comme on sait, $AB = OB = p$. Faisant maintenant $p = 1$, l'intégrale générale devient $\sin \omega . \log x - C$. On obtient pour l'intégrale déterminée de l'aire, depuis le point B, où $x = 1$, jusqu'à $x = x'$,

$$\sin \omega \log x',$$

expression qui indique le logarithme de x' pris dans le système dont le module $= \sin \omega$ (21). Ainsi, par exemple, l'aire BANQ est $= \sin \omega . \log OQ$.

En supposant l'angle ω égal à un droit, l'intégrale déterminée devient $= \log x'$, c'est-à-dire que dans l'hyperbole équilatère, l'espace asymptotique est égal au logarithme naturel de l'abscisse correspondante.

En mettant $\sin \omega$ égal au module des logarithmes ordinaires $= 0,4342945\ldots$ (21), les espaces asymptotiques de cette hyperbole sont les logarithmes ordinaires des abscisses correspondantes. On obtient alors $\omega = 0^{\circ},28801\ldots$

C'est pour cela qu'on nomme les logarithmes en général, mais en particulier les logarithmes népériens, *logarithmes hyperboliques*.

Voici encore un autre exemple pour la quadrature des courbes rapportées aux coordonnées obliques.

Exemple IV. Soit donnée l'équation de la parabole ordinaire (fig. 9) rapportée aux coordonnées rectangles

$$y^2 = ax.$$

On propose de rapporter cette équation aux coordonnées obliques, de sorte que l'origine des coordonnées, ainsi que l'axe des nouvelles abscisses x', restent les mêmes, mais que les nouvelles ordonnées y', telles que KL, renferment un angle avec l'axe des x', le sinus duquel soit $= m$, le cosinus $= n$, la tangente $= \frac{m}{n} = c$.

On a

$$y = y'm, \quad x = x' + y'n.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, $y^2 = ax$, il vient

$$y'^2 . m^2 = ax' + ay'n;$$

d'où

$$y' = \frac{\frac{a}{2c} \pm a^{\frac{1}{2}}\left(x' + \frac{a}{4c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{m};$$

l'ordonnée y' a donc deux valeurs inégales entre elles, exprimées par les lignes OK et OL, en sorte que

$$\text{OK} = \frac{\frac{a}{2c} + a^{\frac{1}{2}}\left(x' + \frac{a}{4c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{m}$$

et OL (considérée seulement par rapport à sa longueur, *voyez* n° 25)

$$= \frac{-\frac{a}{2c} + a^{\frac{1}{2}}\left(x' + \frac{a}{4c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{m}.$$

Pour trouver l'aire que la corde KL coupe de la parabole, il faudra intégrer $m\int y' dx'$ (n° 55). Mettant ici successivement, au lieu de y', les deux expressions de OK et OL, on obtient, après avoir intégré,

$$\text{l'aire} \quad \text{AKOA} = \frac{ax'}{2c} + \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{3}\left(x' + \frac{a}{4c^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{C}$$

et

$$\text{l'aire} \quad \text{ALOA} = \frac{-ax'}{2c} + \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{3}\left(x' + \frac{a}{4c^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{C}'.$$

Or, étant pour $x' = 0$ et AM $= y'$ d'après l'équa-

tion ci-dessus $AM = \frac{a}{cm}$, on a

$$\text{l'aire } AMA = \frac{1}{4} AGMPA \text{ (\textit{voyez} ce numéro, \textit{ex. II})}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} . AP^{\frac{3}{2}} \text{ ou (à cause de } AP = AM . n)$$

$$= \frac{1}{6} a^{\frac{1}{2}} . AM^{\frac{3}{2}} . n^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2}{6c^3}.$$

Ainsi, en mettant dans les intégrales générales ci-dessus $x' = 0$, l'aire $AKOA = \frac{a^2}{6c^3}$, l'aire $ALOA = 0$, et déterminant par là C et C', on obtient les deux intégrales déterminées,

$$\text{l'aire } AKOA = \frac{ax'}{2c} + \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{3}\left(x' + \frac{a}{4c^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{a^2}{12c^3}$$

et

$$\text{l'aire } ALOA = \frac{-ax'}{2c} + \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{3}\left(x' + \frac{a}{4c^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{12c^3};$$

ajoutant ensemble ces expressions, on trouve

$$\text{l'aire } KOLAK = \frac{4a^{\frac{1}{2}}}{3}\left(x' + \frac{a}{4c^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Il résulte d'ailleurs, de ce qui précède, que l'aire ALOA au-dessous de l'axe, si elle n'est pas prise, comme il a été fait ci-dessus, dans sa valeur absolue, aurait le signe négatif, puisqu'elle dérive de l'intégrale $m\int - y' . dx'$.

Nous proposons au lecteur d'effectuer des calculs semblables pour la section conique en général.

Exemple V. Dans la cycloïde (fig. 12), on a (n° 54, probl. 7)

$$dx = \frac{y dy}{(2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

on a donc à intégrer

$$\int y dx = \int \frac{y^2 dy}{(2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En faisant $y = u + a$, il vient

$$\int \frac{(u+a)^2 du}{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = \int u^2 du (a^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} - 2a(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ a^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{u}{a}\right);$$

or, on a, d'après le n° 65 (A),

$$\int u^2 du (a^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{u}{2}(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{u}{a}\right).$$

On parvient donc, en ajoutant ensemble les termes semblables, à l'intégrale générale

$$\frac{3a^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{u}{a}\right) - \frac{(4a + u)}{2}(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} + C,$$

ou, en remettant $u = y - a$,

$$\frac{3a^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y - a}{a}\right) - \frac{(3a + y)}{2}(2ay - y^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

D'après le n° 72, on trouve pour l'intégrale déterminée de l'aire depuis le point A, où $y = 0$, jusqu'à l'ordonnée y',

$$\frac{3a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y' - a}{a}\right)\right] - \frac{(3a + y')}{2}.(2ay' - y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En y faisant $y' = 2a$, il vient, pour la moitié de l'aire

de la cycloïde, AJK, $\frac{3a^2\pi}{2}$; donc, pour l'aire entière de la cycloïde AKL $= 3a^2\pi$, c'est-à-dire que l'aire de la cycloïde est triple de l'aire du cercle générateur.

Remarque. L'intégrale générale donne sur-le-champ l'aire entière de la cycloïde entre les points A et L, où, pour l'un et l'autre, $y = 0$, si l'on prend pour arc ($\sin = -1$) d'abord $-\frac{\pi}{2}$, et puis $+\frac{3\pi}{2}$, en sorte qu'on a

$$-\frac{3a^2}{2}.\frac{\pi}{2} + C \quad \text{et} \quad \frac{3a^2}{2}.\frac{3\pi}{2} + C.$$

Retranchant la première expression de la seconde, on obtient, comme auparavant, $3a^2\pi$.

La détermination de la surface d'une courbe se facilite quelquefois par le changement des coordonnées; prenons la cycloïde pour exemple. En transportant pour cela l'origine des coordonnées de A à K, de sorte que les nouvelles abscisses t se comptent sur la ligne KC, parallèle à AL, savoir de K vers C en sens positif, et que les nouvelles ordonnées z se comptent sur KJ, de K vers J en sens positif, on a

$$t = a\pi - x \quad \text{et} \quad y - 2a = -z,$$

d'où $dx = -dt$ et $dy = -dz$. De cette manière, l'équation différentielle $dx = \frac{ydy}{(2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}}$ se change en

$$dt = \frac{(2a - z)dz}{(2az - z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et la différentielle de l'aire KRM devient par là

$$zdt = \frac{(2az - z^2)dz}{(2az - z^2)^{\frac{1}{2}}} = dz(2az - z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale $\int dz(2az - z^2)^{\frac{1}{2}}$, prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 2a$ (*voyez* exemple II de ce numéro), est égale à l'aire du demi-cercle générateur gmq, c'est-à-dire que l'espace ACKA est égal au demi-cercle $gmqg = \frac{a^2\pi}{2}$.

Étant, de plus, RM une ordonnée quelconque z, l'espace KRM sera égal à la portion gmn du cercle; donc, ACRM est égal à mnq.

L'aire ACKA étant égale à $\frac{a^2\pi}{2}$, et le rectangle..... ACKJ $= 2a^2\pi$, il s'ensuit que l'aire AMKJ $= \frac{3a^2\pi}{2}$, comme on a trouvé ci-dessus.

74. Pour les problèmes suivans, concernant la quadrature des courbes dont les équations sont connues, on ne donnera au lecteur que quelques renseignemens pour faciliter les opérations.

Exemple VI. La cissoïde, traitée au n° 53, exemple III, (fig. 11), a pour équation

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}.$$

L'intégrale de l'aire est donc $\int \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{(2r - x)^{\frac{1}{2}}}$, ou, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $x^{\frac{1}{2}}$,

$$= \int \frac{x^2 dx}{(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

intégrale qui a été déjà traitée dans la cycloïde, n° 73, exemple V.

Quelle est l'aire de la cissoïde, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = r$, et depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2r$?

L'aire entière de la cissoïde est triple de l'aire du cercle dont le rayon $= r$.

On trouve donc ici qu'un espace indéfini équivaut à un espace limité, pareillement comme un nombre fini est égal à une suite infinie de nombres; par exemple,

$$1 = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Exemple VII. Dans la courbe, considérée n° 53, exemple I (fig. 10), dont l'équation $r^2y^2 = r^2x^2 - x^4$, on a

$$\int y\,dx = \frac{1}{r}\int x\,dx(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En y faisant $r^2 - x^2 = u$, d'où $x\,dx = -\frac{1}{2}\,du$, l'intégrale devient

$$-\frac{1}{2r}\int u^{\frac{1}{2}}du = (62) - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3r} + C = -\frac{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3r} + C.$$

Depuis le point O, où $x = 0$, jusqu'à l'abscisse x', on a pour l'intégrale déterminée

$$-\frac{(r^2 - x'^2)^{\frac{3}{2}}}{3r} + \frac{r^2}{3}.$$

L'aire entre $x = 0$ et $x = +r$, et celle entre $x = 0$ et $x = -r$, sont égales chacune à $\frac{r^2}{3}$. La moitié de l'aire de la courbe est donc égale aux deux tiers du quarré élevé au-dessus du rayon.

Puisque x se trouve au quarré dans l'intégrale de l'aire, et que par conséquent une valeur quelconque de x, soit

qu'on la prenne positive ou négative, donne le même résultat, il faut calculer l'aire depuis $x = -r$ jusqu'à $x = 0$, et ensuite l'aire depuis $x = 0$ jusqu'à $x = +r$, chacune à part; l'intégrale générale ne peut donc être prise à la fois depuis $x = -r$ jusqu'à $x = +r$.

75. Nous avons vu dans le Calcul différentiel, n° 26, que la différentielle de l'arc d'une courbe rapportée aux coordonnées rectangles, est $= dx(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$, où $p = \frac{dy}{dx}$. En exprimant $\frac{dy}{dx}$ en x, moyennant l'équation donnée de la courbe, cette différentielle ne renfermera que x. Donc, pour trouver la longueur de l'arc d'une courbe dont l'équation est donnée, ou pour *rectifier* la courbe (quoique la stricte acception de ce terme se borne aux courbes dont l'arc se peut exprimer algébriquement), on n'aura qu'à intégrer cette différentielle. Les règles données n°s 57-71 suffisent pour cette intégration, parce que la différentielle ne renferme que x, comme nous venons de le voir. Le procédé pour la détermination de la constante arbitraire étant ici tout-à-fait le même que dans la quadrature, nous renvoyons le lecteur au n° 72.

Voici quelques exemples de la rectification.

Exemple I. Le cercle a pour équation rapportée au centre

$$y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{-x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On a donc

$$\int dx(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = a\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = (\text{n}^\circ\ 64)a.\text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) + \text{C}.$$

Si l'on prend cette intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, on obtient, pour la longueur de la quatrième partie de la

circonférence $\frac{a\pi}{2}$; donc, pour la longueur de la circonférence entière $2a\pi$, comme on sait déjà par les élémens de la Géométrie.

Exemple II. L'ellipse a pour équation rapportée au centre et à ses axes,

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{-bx}{a(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

donc,

$$\int dx(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx[a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

en posant $a = 1$ et $a^2 - b^2 = 1 - b^2 = e^2$, il vient

$$\int \frac{dx(1 - e^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette intégrale a été développée, au n° 67, en série suivant les puissances entières de e; la série est convergente lorsque e est très petit, c'est-à-dire que les deux axes de l'ellipse diffèrent peu l'un de l'autre. Posant dans cette série $x = 1$, on obtient, pour la quatrième partie de l'arc de l'ellipse,

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1.1.e^2}{2.2} - \frac{1.1.1.3.e^4}{2.2.4.4} - \frac{1.1.1.3.3.5.e^6}{2.2.4.4.6.6} - \ldots\right).$$

Pour l'hyperbole, on tire de l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$,

$$\int dx(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = \int \frac{dx(e^2x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}},$$

(après avoir fait $a = 1$ et $a^2 + b^2 = 1 + b^2 = e^2$).

Cette intégrale peut être développée, par le n° 67, en une série qui sera convergente si e diffère très peu de l'unité.

Exemple III. Pour la parabole ordinaire, on a.... $y^2 = 4cx$; de là

$$\frac{dy}{dx} = p = c^{\frac{1}{2}}.x^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \int dx(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = \int dx\left(1+\frac{c}{x}\right)^{\frac{1}{2}};$$

en développant le radical en série, multipliant chaque terme par dx et intégrant d'après le procédé du n° 67, il vient

$$x + \frac{c}{2}\log x + \frac{c^2}{8x} - \frac{c^3}{32x^2} + \ldots + C.$$

Exemple IV. L'équation de la cycloïde (54) donne

$$dx = \frac{y\,dy}{(2ay-y^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ d'où } \int dx\,(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int dy\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \int \frac{(2a)^{\frac{1}{2}}.\,dy}{(2a-y)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -2(2a)^{\frac{1}{2}}.(2a-y)^{\frac{1}{2}} + C.$$

En prenant cette intégrale depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 2a$, on obtient pour la longueur de la moitié de la cycloïde AK (fig. 12), $4a$. Donc la longueur de la cycloïde entière est $= 8a$, c'est-à-dire qu'elle est quadruple du diamètre du cercle générateur.

L'intégrale générale prise depuis $y = 0$ jusqu'à... $y = \text{PM} = y'$, donne

$$4a - 2(2a)^{\frac{1}{2}}.(2a-y')^{\frac{1}{2}};$$

or on a, si Mm est parallèle à AP,

$$mg = (gn.gq)^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{1}{2}}.(2a-y')^{\frac{1}{2}},$$

donc l'arc AM $= 4a - 2.mg$, et, en conséquence de ce qui précède,

$$MK = 2.gm.$$

Remarque. Pour donner un exemple de la quadrature et de la rectification des courbes rapportées aux coordonnées polaires, prenons la cardioïde, dont nous avons trouvé, au n° 56, les différentielles de l'aire et de l'arc. En les intégrant, on trouve l'arc HDC (fig. 15) $= 4a$, et l'aire..... HDCH $= \frac{3a^2\pi}{4}$. (Pour la dernière intégrale, *voyez* n° 73, *Exemple V.*)

Problème. Trouver l'aire de la spirale d'Archimède (56).

Des équations qui renferment trois variables sous forme explicite.

76. Dans toute équation à trois variables représentées par x, y, z, l'une d'elles est dépendante des deux autres qui, toutefois, sont indépendantes entre elles; car si l'on supposait que l'une des variables, z par exemple, fût dépendante de y et de x, mais que y fût dépendant de x, il n'y aurait dans l'équation que deux quantités variables, savoir, la variable indépendante x et la variable dépendante z (la dernière comme dépendant immédiatement de y, et comme dépendant médiatement de x; *voyez* n° 10).

Les équations à trois variables se distinguent (3) en équations *explicites* et *implicites*. Les équations explicites à trois variables, lesquelles seules nous traiterons dans ce qui suit, sont telles, que l'une des trois variables, z par exemple, se trouve seule dans l'un des membres de l'équation; elles sont par conséquent de la forme $z = f(x, y)$, où x, y sont indépendans l'un de l'autre, comme nous venons de le démontrer.

C'est à cause de cette indépendance de x et y entre eux, qu'on pourra mettre d'abord, en regardant y comme constant, $x + \Delta x$, au lieu de x dans la fonction z. On obtient par cela, au lieu de z (n° 6), $z + \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x$; en en retranchant la fonction primitive z, et en divisant ensuite par Δx, il vient $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, expression que nous appellerons le *quotient des différences partielles* de z par rapport à x. On obtient de même $\frac{\Delta z}{\Delta y}$ comme le quotient des différences partielles de z par rapport à y, en mettant $y + \Delta y$ au lieu de y dans

la fonction z, et en regardant x comme constant. D'après le n° 17, on obtient

$$z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x = f(x+h, y) = z + \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$

et

$$z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y = f(x, y+k) = z + \frac{dz}{dy}k + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \ldots,$$

où (*voyez* n° 17), $h = \Delta x$ et $k = \Delta y$. Les deux coefficiens différentiels du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, qu'on désigne ordinairement par les lettres p et q, se nomment *coefficiens différentiels partiels* de la fonction z. On appelle de même $p.dx$ et $q.dy$ les *différentielles partielles* de la fonction z, tandis que l'expression $dz = pdx + qdy$, c'est-à-dire la somme des deux différentielles partielles, s'appelle la *différentielle totale* de la fonction z.

On a, par exemple, dans l'équation $z = \frac{ax^2 + xy^2}{b^2}$

$$z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x = \frac{a(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)y^2}{b^2},$$

et

$$z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y = \frac{ax^2 + x(y+\Delta y)^2}{b^2};$$

d'où

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{2ax+y^2}{b^2} + \frac{a}{b^2}\Delta x \quad \text{et} \quad \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{2xy}{b^2} + \frac{x}{b^2}\Delta y;$$

donc

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2ax+y^2}{b^2} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{2xy}{b^2}.$$

De la même manière qu'on a obtenu ci-dessus, par la

substitution de $x + \Delta x$ au lieu de x dans l'expression z, $f(x+h,y) = z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$, on obtiendra, en substituant $y + \Delta y$ au lieu de y, dans l'expression $z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$,

$$f(x+h, y+k) = z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta\left(z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x\right)}{\Delta y}\Delta y$$

$$= (\text{n}^{\text{o}}\ 8)\ z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x}{\Delta y}\Delta y.$$

Mais en mettant $x + \Delta x$ au lieu de x dans

$$f(x, y+k) = z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y,$$

on obtient

$$f(y+k, x+h) = z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta\left(z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\right)}{\Delta x}\Delta x$$

$$= (\text{n}^{\text{o}}\ 8)\ z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta\frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y}{\Delta x}\Delta x.$$

Ces deux expressions seront nécessairement équivalentes entre elles, puisqu'il revient au même, comme on voit aisément, de mettre d'abord $x + \Delta x$ au lieu de x, et ensuite $y + \Delta y$ au lieu de y, dans l'expression de z, ou de mettre dans un ordre inverse, d'abord $y + \Delta y$ au lieu de y, et ensuite $x + \Delta x$ au lieu de x.

Retranchant maintenant de chacune de ces deux expressions, égales entre elles, la quantité $z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$, il vient

$$\frac{\Delta \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x}{\Delta y} \Delta y = \frac{\Delta \frac{\Delta z}{\Delta y} \Delta y}{\Delta x} \Delta x,$$

ou, comme on écrit ordinairement, pour abréger,

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x . \Delta y} \Delta x . \Delta y = \frac{\Delta^2 z}{\Delta y . \Delta x} \Delta y . \Delta x.$$

Pour obtenir maintenant une série pour $f(x+h, y+k)$, on n'aura qu'à substituer dans les séries données ci-dessus pour $z + \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x$ et pour $z + \frac{\Delta z}{\Delta y} \Delta y$, ou dans la première $z + \frac{\Delta z}{\Delta y} \Delta y$ au lieu de z, ou dans la seconde... $z + \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x$ au lieu de z.

En faisant cette substitution, on se trouve dans le cas de prendre d'un coefficient différentiel, pris par rapport à l'une des deux variables, un coefficient différentiel du même ordre ou d'un autre par rapport à l'autre variable.

Ainsi, par exemple, l'expression

$$\frac{d^n \frac{d^m z}{dx^m}}{dy^n},$$

où m et n sont des nombres entiers, indique une différenciation effectuée m fois de suite par rapport à x, et une différenciation effectuée ensuite n fois de suite par rapport à y. On écrit d'ailleurs cette expression, pour abréger, ainsi :

$$\frac{d^{m+n} z}{dx^m . dy^n}.$$

D'après cela, on écrit, au lieu de $\frac{d.\frac{dz}{dx}}{dy}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$; au lieu de $\frac{d\frac{dz}{dx}}{dy^2}$, $\frac{d^3z}{dx.dy^2}$; au lieu de $\frac{d^2\frac{dz}{dy}}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dy.dx^2}$; au lieu de $\frac{d\frac{d^2z}{dx^2}}{dy}$, $\frac{d^3z}{dx^2.dy}$, etc.

En employant cette manière abrégée d'écrire, on obtient les séries suivantes, égales entre elles,

$$\begin{aligned}
&z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta^2 z}{\Delta x\,\Delta y}\Delta x\,\Delta y \\
&= z + \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \\
&\quad + \frac{dz}{dy}k + \frac{d^2z}{dx.dy}\cdot\frac{h}{1}\cdot\frac{k}{1} + \frac{d^3z}{dx^2.dy}\cdot\frac{h^2}{1.2}\cdot\frac{k}{1} + \ldots \\
&\qquad + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx.dy^2}\cdot\frac{h}{1}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \ldots \\
&\qquad\qquad + \frac{d^3z}{dy^3}\cdot\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad + \ldots
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta^2 z}{\Delta y\Delta x}\Delta y\Delta x \\
&= z + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{k}{1} + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dy^3}\cdot\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots\ldots - \\
&\quad + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dy.dx}\cdot\frac{k}{1}\cdot\frac{h}{1} + \frac{d^3z}{dy^2dx}\cdot\frac{k^2}{1.2}\cdot\frac{h}{1} + \ldots\ldots - \\
&\qquad + \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dy.dx^2}\cdot\frac{k}{1}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots - \\
&\qquad\qquad + \frac{d^3z}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad + \ldots -
\end{aligned}$$

En comparant dans ces deux séries, égales entre elles, les termes qui sont affectés des mêmes puissances des quantités h et k, indépendantes entre elles, on tombera sur l'équation suivante

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx},$$

c'est-à-dire que le coefficient différentiel du second ordre de z, pris par rapport à x, et ensuite par rapport à y, est égal au coefficient différentiel du second ordre de z, pris d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x. On a de même

$$\frac{d^3z}{dx^2dy} = \frac{d^3z}{dydx^2},$$

et en général,

$$\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n} = \frac{d^{m+n}z}{dy^n dx^m}.$$

De plus, on tire de chacune des séries ci-dessus développées, en retranchant $z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$, et divisant le reste par $\Delta x . \Delta y = h . k$,

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x . \Delta y} = \frac{\Delta^2 z}{\Delta y . \Delta x} = \frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d^3z}{dx^2.dy} \cdot \frac{h}{2} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{d^3z}{dy^2.dx} \cdot \frac{k}{2} + \ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots$$

Ce que nous exprimerons par

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x, \Delta y} = \frac{d^2z}{dx.dy} + \psi,$$

où ψ désigne une série dont chaque terme renferme les quantités Δx et Δy, et qui, dans la supposition que Δx et Δy soient en même temps fort petits, peut elle-même

devenir plus petite que toute quantité assignable. (*Comparez* n° 23.)

Enfin, on pourra mettre dans l'expression de $z+\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$, $x+\Delta x$ au lieu de x, et l'on obtient alors une série pour $z+\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x+\frac{\Delta\left(z+\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x\right)}{\Delta x}\Delta x$, ou pour (8) $z+2\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$ $+\frac{\Delta\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x}{\Delta x}\Delta x$; donc aussi pour $\frac{\Delta\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x}{\Delta x}\Delta x$, ou, comme on écrit ordinairement, pour $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}\Delta x^2$.

En mettant $y+\Delta y$ au lieu de y, dans $z+\frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$, on obtient d'une manière semblable $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}\Delta y^2$.

On trouve ainsi des séries pour les deux quotiens des différences du second ordre $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2}$ et $\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2}$, qu'on pourra, de la même manière que ci-dessus, représenter par..... $\frac{d^2 z}{dx^2}+\psi'$ et $\frac{d^2 z}{dy^2}+\psi''$.

Nous développerons encore, dans l'exemple déjà considéré $z=\frac{ax^2+xy^2}{b^2}$, les quotiens des différences et les coefficiens différentiels du second ordre.

En mettant dans les expressions obtenues pour $z+\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$ et pour $z+\frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$, dans la première, $y+\Delta y$ au lieu de y, et dans la seconde, $x+\Delta x$ au lieu de x; retranchant de ces deux résultats $z+\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x+\frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$, et divisant en-

suite par $\Delta x . \Delta y$, on obtient

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} = \frac{\Delta^2 z}{\Delta y \Delta x} = \frac{2y}{b^2} + \frac{1}{b^2}\Delta y,$$

d'où il suit

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = \frac{d^2 z}{dy dx} = \frac{2y}{b^2}.$$

De plus, en mettant dans l'expression trouvée pour $z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$, $x + \Delta x$ au lieu de x; retranchant du résultat $z + 2\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$, et divisant par Δx^2, il vient

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = \frac{2a}{b^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{2a}{b^2};$$

enfin, mettant dans l'expression de $z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$, $y + \Delta y$ au lieu de y; retranchant du résultat $z + 2\frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$, et divisant par Δy^2, il vient

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y^2} = \frac{2x}{b^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{2x}{b^2}.$$

Les coefficiens différentiels du second ordre renfermant, en général, x et y, on pourra les différencier comme on a fait avec z, p et q; en poursuivant de cette manière, on obtient sans difficulté les coefficiens différentiels d'un ordre quelconque.

Exemple I. Soit $z = x^3 - x^2 y$. On a

$$p = 3x^2 - 2xy, \quad q = -x^2.$$
$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2 z}{dx^2} = 6x - 2y, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{d^2 z}{dx dy} = -2x,$$

$$\frac{dq}{dx}=\frac{d^2z}{dydx}=-2x,\quad \frac{dq}{dy}=0,$$
$$\frac{d^2p}{dx^2}=\frac{d^3z}{dx^3}=6,\quad \frac{d^2p}{dxdy}=\frac{d^3z}{dx^2dy}=-2,$$
$$\frac{d^2q}{dx^2}=\frac{d^3z}{dydx^2}=-2.$$

Exemple II. Soit $z=x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$. On a

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y}{2x^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{dz}{dy}=x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}},$$
$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{-y}{4x^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}},$$
$$\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{-3}{4y^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{d^3z}{dx^3}=\frac{3yx^{-\frac{5}{2}}}{8},$$
$$\frac{d^3z}{dx^2dy}=\frac{d^3z}{dydx^2}=\frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}},\quad \text{etc.}$$

Exemple III. Soit $z=\frac{x}{y^{\frac{1}{2}}}-y^{\frac{1}{2}}$.

77. Avant d'appliquer aux surfaces courbes ce qui a été dit jusqu'ici sur la différenciation des équations à trois variables, il sera bon de rappeler au lecteur, en peu de mots, quelques propositions concernant les corps et les surfaces en général.

De la même manière que le point considéré dans le plan est donné par sa distance de deux droites déterminées à l'égard de leur position dans ce plan, le point considéré dans l'espace est aussi tout-à-fait donné par sa distance de trois plans déterminés par rapport à leur position. Ces trois plans portent le nom de *plans coordonnés ;* leur point

d'intersection commun s'appelle l'*origine des coordonnées*, et les lignes d'intersection de ces plans coordonnés, deux à deux, s'appellent les *axes* des coordonnées sur lesquels les coordonnées se comptent. On désigne ordinairement les coordonnées par les lettres x, y, z, et les plans coordonnés s'appellent pour cela aussi les plans des xy, des yz et des xz, selon que les deux axes des coordonnées x et y, ou y et z, ou enfin x et z, y sont compris.

Les droites perpendiculaires menées du point considéré à chacun des trois plans coordonnés, lesquelles, comme on voit aisément, sont égales aux coordonnées de ce point, s'appellent les *lignes projetantes* de ce point, et les pieds de ces lignes dans les trois plans s'appellent les *projections* de ce point.

On suppose ordinairement les plans coordonnés rectangles entre eux, à moins qu'on n'avertisse du contraire; mais il est évident par soi-même qu'on les pourra aussi prendre sous un angle arbitraire quelconque.

Les plans menés par une ligne droite, dans l'espace, perpendiculairement sur les trois plans coordonnés, s'appellent les *plans projetans*, et les intersections de ces plans projetans avec les plans coordonnés, s'appellent les *projections* de cette ligne droite. Par ces projections, la droite est tout-à-fait déterminée. Sa projection sur le plan des xy est en général

$$y = ax + b,$$

sur celui des xz,

$$z = a'x + b',$$

et sur celui des yz,

$$z = a''y + b''.$$

On voit aisément que, par deux de ces équations, la troi-

sième est déterminée; donc, la ligne droite considérée dans l'espace est tout-à-fait déterminée par deux projections.

Si une ligne droite donnée doit passer par un point dont les coordonnées sont x', y', z', il faudra que les projections de la droite passent par les projections du point dans le même plan coordonné; les équations cherchées seront donc

$$z - z' = a'(x - x'), \quad z - z' = a''(y - y'). \text{ (Voy. n° 47.)}$$

L'équation de la surface en général renferme les trois variables x, y et z, dont l'une, z par exemple, est dépendante des deux autres, lesquelles sont indépendantes entre elles. La plus simple de ces équations est celle du plan; elle est représentée par

$$ax + by + cz = d.$$

Si le plan passe par l'origine des coordonnées, on a pour ce point, x, y, z en même temps nuls; donc, $d = 0$. L'équation devient, par cette condition,

$$ax + by + cz = 0.$$

Dans la droite formée par l'intersection du plan proposé avec le plan des xy, on aura $z = 0$; l'équation de cette droite sera donc

$$ax + by = d.$$

On voit par là aisément de quelle forme seront les équations des intersections du plan proposé avec les deux autres plans coordonnés.

Dans un plan parallèle au plan des xy, et conséquemment perpendiculaire aux deux autres plans coordonnés, z sera constant, par exemple $= h$; un tel plan a donc pour

équation $z = h$. La ligne d'intersection formée par ce plan avec celui dont l'équation est $ax + by + cz = d$ se détermine par conséquent par les deux équations

$$ax + by + cz = d \quad \text{et} \quad z = h,$$

ou par la seule équation

$$ax + by = d - ch.$$

Quelles seront les équations du plan parallèle aux plans coordonnés des yz et des xz?

Si le plan doit passer par un point dont les coordonnées sont x', y', z', on a, outre l'équation générale du plan, encore cette équation de condition

$$ax' + by' + cz' = d;$$

on en tire l'équation cherchée

$$a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0.$$

Quelle est l'équation du plan passant par deux points déterminés?

On propose, dans les élémens de la Géométrie analytique, plusieurs problèmes concernant la position de la ligne droite relative au plan. Nous n'en rapporterons ici que les suivans.

Soit donné un plan par l'équation $ax + by + cz = d$; on propose de trouver l'équation d'une ligne droite qui soit perpendiculaire au plan.

Les projections de la droite cherchée sur chacun des plans coordonnés sont ici perpendiculaires aux lignes d'intersection du plan proposé avec le même plan coordonné. Or, deux de ces intersections ont pour équations

$$ax + cz = d \quad \text{et} \quad by + cz = d;$$

donc, en supposant que les projections de la droite soient

$$z = \alpha x + \beta \quad \text{et} \quad z = \gamma y + \delta,$$

on aura (*comparez* n° 47)

$$\alpha = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{c}{b}.$$

Si la perpendiculaire cherchée devait encore passer par un point dont les coordonnées sont x', y', z', les équations cherchées seraient

$$z - z' = \frac{c}{a}(x - x') \quad \text{et} \quad z - z' = \frac{c}{b}(y - y').$$

On en conclura aisément que, si une droite avait pour équations $z - z' = \frac{1}{a}(x - x')$ et $z - z' = \frac{1}{b}(y - y')$, l'équation du plan qui lui serait perpendiculaire dans le point dont les coordonnées sont x', y', z', serait

$$z - z' = -a(x - x') - b(y - y').$$

Les trois plans coordonnés coupent, sur un plan qui n'est parallèle à aucun d'eux, un triangle dont les côtés sont les intersections de ce plan avec les plans coordonnés. Les projections de ce triangle sur les plans coordonnés formeront trois triangles rectangles. En désignant l'aire du triangle projeté par S, et celle des trois projections par A, B, C, on prouvera aisément que

$$S^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

On connaîtra la nature des corps ou des surfaces courbes, si l'on connaît leurs intersections formées, ou par les plans coordonnés mêmes, ou par des plans parallèles aux plans coordonnés. Celles-là s'appellent *sections principales*, celles-ci

sections secondaires ou *parallèles*, et notamment celles des xy, ou des xz, ou des yz, selon qu'elles sont parallèles aux plans coordonnés des xy, ou des xz, ou des yz. Montrons, dans l'exemple suivant, comment on saisit la nature du corps par ces sections.

Soit à examiner, par exemple, le corps qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Le plan coordonné des xy donne la section principale $x^2 + y^2 = r^2$; donc, un cercle du rayon $= r$. La section parallèle au plan des xy, à la distance $z = z'$, donne

$$x^2 + y^2 = r^2 - z'^2,$$

encore un cercle dont le rayon $= (r^2 - z'^2)^{\frac{1}{2}}$. Pour les autres sections, soit principales, soit parallèles, on trouvera des équations de la même forme. Toutes les sections, tant principales que parallèles, étant des cercles, on en conclut que le corps proposé est une sphère.

On mène aussi par un corps proposé, pour en examiner la nature, un plan qui n'est parallèle à aucun des plans coordonnés, et l'on examine la nature de cette intersection. Nous ne rapporterons ici que les valeurs qu'il faudra mettre dans l'équation proposée pour chacune des trois coordonnées, pour obtenir l'équation de la section en question, savoir

$$\begin{aligned} x &= t.\cos\alpha + v.\sin\alpha.\cos\varphi, \\ y &= v.\cos\alpha.\cos\varphi - t.\sin\alpha - a, \\ z &= v.\sin\varphi, \end{aligned}$$

où t et v représentent les coordonnées de la section, φ l'angle compris entre le plan coupant et le plan des xy, α l'angle compris entre les axes des x et des t, qui sont

situés tous deux dans le plan des xy, et a la perpendiculaire à l'axe des x, depuis l'origine jusqu'à l'axe des t.

Enfin, pour la recherche de la nature d'un corps, on emploie la transformation des coordonnées. Nous ne rapporterons ici que les valeurs de x, y, z, lorsque les nouvelles coordonnées t, u, v sont aussi rectangulaires et qu'elles ont la même origine que les anciennes :

$$x = at + bu + cv,$$
$$y = a't + b'u + c'v,$$
$$z = a''t + b''u + c''v,$$

où a, b, c, a', etc., désignent tous des cosinus, savoir : a le cosinus de l'angle compris entre les axes des x et des t; b le cosinus de l'angle compris entre les axes des x et des u; c celui de l'angle compris entre ceux des x et des v; a' entre ceux des y et des t, etc.

78. Soit maintenant représentée (fig. 18) une surface courbe. Soit A l'origine des coordonnées ; soient AB, AC, AD les axes des x, y, z; donc, les plans BAC, BAD, et CAD seront les plans des xy, des xz et des yz. On aura alors pour le point R dans la surface, $AP = x$, $PM = y$, $MR = z$. Soit, de plus, $PP' = \Delta x = h$, $MN = M'N' = QQ' = \Delta y = k$. Qu'on mène, par les côtés du rectangle MM'NN' situé dans le plan des xy, quatre plans perpendiculaires : ceux qu'on aura menés par MN et M'N', parallèles au plan coordonné des yz, couperont la surface suivant les courbes parallèles EE' et FF', et ceux qu'on aura menés par MM' et NN', parallèles au plan coordonné des xz, couperont la surface suivant les courbes parallèles GG' et HH'. Ces quatre plans couperont de la surface, la portion RR'SS' dont la projection sur le plan des xy sera le rectangle MM'NN'. (*Voyez* n° 77.)

On a, d'après ce qui précède et d'après le n° 76,

$$MR = z, \quad M'R' = f(x+h, y) = z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$$
$$= z + \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \ldots,$$
$$NS = f(x, y+k) = z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y = z + \frac{dz}{dy}k + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \ldots$$

Or, on obtient l'expression de N'S', comme l'inspection de la figure fait voir clairement, en substituant dans l'expression de NS, $x + \Delta x$ au lieu de x, ou dans celle de M'R', $y + \Delta y$ au lieu de y. On a donc

$$N'S' = NS + \frac{\Delta.NS}{\Delta x}\Delta x = \text{(d'après ce qui précède)}$$
$$z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta\left(z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y\right)}{\Delta x}\Delta x = z + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$$
$$+ \frac{\Delta^2 z}{\Delta y \Delta x}\Delta y \Delta x,$$

et de même

$$N'S' = M'R' + \frac{\Delta.M'R'}{\Delta y}\Delta y = \text{(d'après les remarq. ci-dessus)}$$
$$z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta\left(z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x\right)}{\Delta y}\Delta y = z + \frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$$
$$+ \frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y}\Delta x \Delta y.$$

On a, par conséquent, $N'S' = f(x+h, y+k)$, expression que nous avons développée au n° 76.

Voilà donc, prouvée géométriquement, la proposition du n° 76, que

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} = \frac{\Delta^2 z}{\Delta y \Delta x}.$$

Qu'on imagine maintenant, au point R de la surface courbe, un plan tangent; celui-ci sera coupé par les deux plans menés par R, suivant deux lignes droites, perpendiculaires l'une sur l'autre, qui seront tangentes aux courbes EE′ et GG′. D'après le n° 45, $\frac{dz}{dx} = (76)p$ exprime la tangente trigonométrique de l'angle formé par QG′ parallèle à l'axe des x, et la tangente à la courbe GG′; $\frac{dz}{dy} = (76)\,q$ exprime la tangente trigonométrique de l'angle formé par PE′ et la tangente à la courbe EE′.

En désignant les coordonnées de ces deux tangentes par x, z et y, z, et les coordonnées du point R, pour les distinguer, par x', y', z', $\left(\text{d'où } p' = \frac{dz'}{dx'},\ q' = \frac{dz'}{dy'}\right)$, les équations de ces deux tangentes seront de la forme (48)

$$z - z' = p'(x - x') \quad \text{et} \quad z - z' = q'(y - y').$$

La droite qui a pour équations

$$z - z = \frac{-1}{p'}(x - x') \quad \text{et} \quad z - z' = -\frac{1}{q'}(y - y')$$

est dans le point d'intersection R perpendiculaire tant à la première tangente qu'à la seconde (*voyez* n°s 47 et 48); donc, dans le point R perpendiculaire aussi sur le plan tangent même; par conséquent elle est la normale.

Il suit des équations de la normale que nous venons de trouver, d'après le n° 77, que le plan tangent a pour équation

$$z - z' = p'(x - x') + q'(y - y').$$

La distance du point de contact R à un point quelconque dans la normale, sera

$$= [(z - z')^2 + (y - y')^2 + (x - x')^2]^{\frac{1}{2}},$$

ou encore, en vertu des équations précédentes de la normale,

$$= (z - z').(1 + p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En y faisant $z = 0$, on obtient pour la longueur de la normale, depuis le point de contact jusqu'au plan des xy,

$$- z'.(1 + p'^2 + q'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

De la Cubature des corps.

79. Nous avons démontré au n° 76 la proposition

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x \Delta y} = \frac{dz^2}{dx dy} + \psi,$$

où ψ renferme, outre x et y, encore Δx et Δy; par conséquent, si Δx et Δy sont supposés fort petits, ψ pourra devenir moindre que toute quantité assignable, quelque petite qu'elle soit.

Soit maintenant, en même temps,

$$\frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta x \Delta y} < \alpha + \psi' \quad \text{et} \quad \frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta x \Delta y} > \alpha + \psi'',$$

où φ, aussi bien que α, ne renferment que x et y, mais ψ' et ψ'', outre x et y, renferment encore Δx et Δy. Démontrons qu'on a alors

$$\frac{d^2 \varphi}{dx dy} = \alpha.$$

Pour cela, nous ferons usage du raisonnement du n° 24. Dans la supposition de

$$\frac{d^2 \varphi}{dx dy} > \alpha, \quad \text{mettons} \quad \frac{d^2 \varphi}{dx dy} = \alpha + \beta,$$

où β, étant de la même nature que α, ne renferme que x et y. On aura alors, quelle que soit la valeur de Δx et Δy (*voyez* n° 76),

$$\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x \Delta y} = \alpha + \beta + \pi,$$

où π, renfermant x, y, Δx et Δy, supposé que Δx et Δy soient en même temps fort petits, peut devenir moindre que toute quantité assignable. En comparant avec cela la première supposition, que $\frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x \Delta y} < \alpha + \psi'$, on a

$$\alpha + \beta + \pi < \alpha + \psi', \quad \text{d'où} \quad \beta < \psi' - \pi,$$

ce qui ne saurait subsister pour chaque valeur de Δx et de Δy.

De la même manière, on pourra prouver qu'on ne peut avoir $\frac{d^2\varphi}{dx dy} < \alpha$. Il faut donc que, suivant l'énoncé du problème, on ait

$$\frac{d^2\varphi}{dx dy} = \alpha.$$

Au moyen de cette proposition, nous allons trouver la différentielle du volume d'un corps.

En désignant par u le volume du corps qui, ayant pour base (fig. 18) le rectangle APMQ dans le plan des xy, est terminé par la surface courbe, par les plans coordonnés des xz et des yz, et par des plans parallèles menés par PM et QM, on aura [Δx étant $=$ PP′ (78) et $\Delta y =$ QQ′] pour le volume au-dessus de la base AP′M′Q,

$$u + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x,$$

et pour celui au-dessus de la base APNQ′,

$$u + \frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y;$$

donc le volume au-dessus de la base PP′MM′, sera

$$=\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x,$$

et celui au-dessus de la base QQ′MN sera,

$$=\frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y \text{ (voyez n° 76).}$$

D'après les mêmes raisonnemens, le volume au-dessus de la base PP′NN′ sera

$$=\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x+\frac{\Delta\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x}{\Delta y}\Delta y,$$

et celui au-dessus de la base QM′N′Q′ sera

$$=\frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y+\frac{\Delta\frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y}{\Delta x}\Delta x;$$

donc, celui au-dessus de la base MM′N′N sera

$$=\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\Delta y}\Delta x\Delta y=\frac{\Delta^2 u}{\Delta y\Delta x}\Delta y\Delta x \text{ (76).}$$

Si, par les points R, R′, S, S′, dans la surface courbe, on mène des plans parallèles au plan des xy, on formera quatre parallélépipèdes qui auront la même base MM′NN′, et dont les hauteurs respectives seront les quatre ordonnées MR, M′R′, NS, N′S′. En multipliant maintenant par $\Delta x\Delta y$ les expressions obtenues pour ces quatre ordonnées, dans les n°s 76, 78, on parviendra au volume de ces quatre parallélépipèdes, entre lesquels la portion du corps, exprimée par $\frac{\Delta^2 u}{\Delta x\Delta y}\Delta x\Delta y$, est comprise, sup-

posé qu'on assigne à Δx et Δy des valeurs suffisamment petites. Divisant ensuite par $\Delta x \Delta y$ les expressions obtenues pour les quatre parallélépipèdes, ainsi que l'expression $\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y} \Delta x \Delta y$, et désignant dans ces expressions (comme il a été fait au n° 76) la somme de tous les termes qui renferment Δx et Δy, par les lettres ψ, ψ', ψ'', on obtiendra les valeurs de

$$z, \quad z + \psi, \quad z + \psi', \quad z + \psi'',$$

entre lesquelles $\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}$ est compris. En vertu de la proposition ci-dessus prouvée, on aura donc

$$\frac{d^2 u}{dx dy} = z, \quad \text{ou} \quad d^2 u = z . dx dy.$$

80. De l'expression $\frac{d^2 u}{dx dy} = z$, ou $\frac{d \frac{du}{dy}}{dx} = z$ (76), on tire

$$d \frac{du}{dy} = z dx, \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dy} = \int z dx.$$

Il est clair que z est ici regardé comme fonction de la seule variable x, et qu'il faut prendre l'intégrale seulement par rapport à x. De plus, on a

$$du = dy . \int z dx, \quad \text{ou} \quad u = \int dy \int z dx,$$

une seconde intégrale qui ne se pourra prendre que par rapport à y. Donc, pour trouver u, c'est-à-dire le volume d'un corps, il faut multiplier par dx la valeur de z tirée de l'équation du corps, et intégrer $z dx$, en regardant seulement x comme variable, entre deux limites de x; il faut ensuite multiplier le résultat par dy, et intégrer par rapport à y entre deux limites de cette variable. On par-

vient ainsi au volume du corps par une intégration double mais successive, qui pourra s'effectuer d'après les n°s 57 et suivans, parce que les intégrales se prennent chaque fois par rapport à l'une seule des deux variables indépendantes.

Si l'on veut prendre la première intégrale $\int z dx$, depuis l'origine des coordonnées, où $x = 0$, jusqu'à l'intersection du plan coupant parallèle à celui des yz, dans la distance indéterminée à l'origine $= y$, il faudra égaler z à zéro, dans l'équation du corps, laquelle sera également l'équation de l'intersection dans la distance $= y$, et ensuite en développer la seconde limite de x.

Dans les corps où l'aire d'une section parallèle dans la distance $= y$ s'obtient par une expression finie, il n'est besoin que d'égaler $\int z dx$ à cette aire, de multiplier par dy, et d'intégrer ensuite par rapport à y, entre deux limites de y.

Le lecteur comprendra d'ailleurs que cette dernière méthode pour trouver le volume s'accorde tout-à-fait avec la méthode du n° 55, pour trouver l'aire d'une courbe. Les exemples suivans mettront en plein jour ce qui a été dit ici.

Comme il est indifférent de regarder l'une ou l'autre des trois variables comme la dépendante (76), il est encore à remarquer que la formule pour la cubature se peut aussi exprimer ainsi :

$$\int dy \int x dz, \text{ ou } \int dz \int y dx.$$

Exemple I. Soit proposée l'équation de la sphère, rapportée au centre,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

On a ici

$$\int y dx = \int (r^2 - z^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

(où x seul est à regarder comme variable)

$$= [65, (B) ; 64, \text{ exemple V}] \frac{x}{2}(r^2 - z^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{1}{2}(r^2 - z^2).\text{arc}\left(\sin = -\frac{x}{(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}\right) + C.$$

Pour trouver la valeur extrême de x dans la section parallèle, dans la distance indéterminée à l'origine $= z$, on mettra, d'après ce qui précède, dans l'équation de la sphère, $y = 0$; on trouvera ainsi $x = (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$. Si l'on prend l'intégrale trouvée depuis $x = 0$ jusqu'à $x = (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$, on aura $\frac{1}{2}(r^2 - z^2).\frac{\pi}{2}$. La seconde intégrale sera donc

$$\int \frac{\pi}{4}(r^2 - z^2)dz = \frac{\pi r^2 z}{4} - \frac{\pi z^3}{12} + C.$$

En prenant cette intégrale depuis $z = 0$ jusqu'à $z = +r$, on obtient, pour la huitième partie de la sphère, $\frac{\pi r^3}{6}$; donc, pour le volume entier de la sphère, $\frac{4\pi r^3}{3}$, comme on sait déjà par les élémens de la Géométrie.

La section de la sphère parallèle au plan des yx, dans la distance indéterminée à l'origine $= z$, étant un cercle du rayon $= (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$, l'aire de cette section parallèle est $= \pi(r^2 - z^2)$. D'après ce qui a été dit ci-dessus, il faudra multiplier cette expression par dz et intégrer ensuite depuis $z = 0$ jusqu'à $z = +r$. En multipliant alors le résultat par 2, on obtient pour le volume de la sphère la même valeur que ci-dessus.

Exemple II. Soit donnée l'équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = r^3.$$

Toutes les sections, soit principales, soit secondaires, donnent des ellipses, et c'est à cause de cette propriété que ce corps s'appelle *ellipsoïde*. L'ellipse formée par le plan coupant parallèle à celui des xy, a pour ses deux demi-axes

$$\left(\frac{r^3 - cz^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \left(\frac{r^3 - cz^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}};$$

son aire est (73, exemple II) $= \frac{\pi(r^3 - cz^2)}{(ab)^{\frac{1}{2}}}$. On en tire l'intégrale

$$\frac{\pi r^3}{(ab)^{\frac{1}{2}}} \int dz - \frac{c\pi}{(ab)^{\frac{1}{2}}} \int z^2 dz = \frac{\pi r^3 z}{(ab)^{\frac{1}{2}}} - \frac{c\pi . z^3}{3(ab)^{\frac{1}{2}}} + C.$$

Or on a, pour la section principale des xz, l'équation $ax^2 + cz^2 = r^3$, d'où l'on tire, pour le demi-axe dans la direction des z, $\left(\frac{r^3}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$; on prendra donc l'intégrale précédente depuis $z = +\left(\frac{r^3}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$ jusqu'à $z = -\left(\frac{r^3}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$. On trouvera par là, pour le volume entier du corps considéré,

$$\frac{4\pi r^{\frac{9}{2}}}{3(abc)^{\frac{1}{2}}}.$$

En considérant les deux sections principales des xy et des xz, on trouve pour les trois axes de l'ellipsoïde

$$\left(\frac{r^3}{a}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{r^3}{b}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{r^3}{c}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En les désignant par A, B, C, on obtiendra, pour le vo-

lume exprimé par les axes,

$$\frac{4\pi.\mathrm{ABC}}{3}.$$

En faisant, dans l'équation proposée, $a=b=c=r$, le corps devient une sphère dont le rayon $=r$, et dont le volume $=\frac{4r^3\pi}{3}$, comme nous avons déjà trouvé dans l'exemple précédent. Si seulement $a=b=r$, le corps s'appelle *sphéroïde*. Comment reconnaîtra-t-on sa figure, par le moyen des sections principales et secondaires, et quel sera son volume?

Exemple III. Soit proposée l'équation $ax^2+by^2-cz^2=0$. On voit aisément, par le n° 77, que cette équation appartient à un cône droit dont le sommet est à l'origine des coordonnées, et dont la base est une ellipse.

L'ellipse formée par le plan coupant parallèle au plan des xy, dans la hauteur $=z$, a pour ses demi-axes

$$z\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad z\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2}};$$

donc son aire est égale (73) à $\frac{\pi z^2 c}{(ab)^{\frac{1}{2}}}$. La seconde intégrale est, en conséquence, $\frac{\pi c z^3}{3(ab)^{\frac{1}{2}}}+\mathrm{C}$, et donne, prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=z'$, pour le volume du cône,

$$\frac{\pi c z'^3}{3(ab)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\pi c z'^2}{(ab)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{z'}{3},$$

c'est-à-dire que le volume du cône, depuis le sommet jusqu'à la hauteur z', est égal au tiers du produit de la base (73) par la hauteur, comme on le sait déjà par les élémens de la Géométrie.

Du Volume des corps de révolution.

81. Supposons qu'une section principale d'un corps, celle, par exemple, du plan des xy, et toutes les sections qui lui sont parallèles, soient des cercles, et menons par un point de la surface, dont les coordonnées soient x, y, z, deux plans dont l'un soit perpendiculaire à l'axe des z (et ainsi une section parallèle au plan des xy), et dont l'autre passe par l'axe des z : l'intersection de ces deux plans perpendiculaires entre eux sera alors le diamètre de la section parallèle, c'est-à-dire du cercle. Désignant son rayon par u, on aura $u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$; désignant, de plus, l'intersection du second plan avec le corps, par $u = f(z)$, le corps considéré sera tout-à-fait déterminé par le système des deux équations

$$u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad u = f(z),$$

d'où l'on tire, par l'élimination de u, cette seule équation qui appartient au corps,

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = f(z).$$

Mais on voit aisément que le corps considéré peut être regardé comme engendré par la révolution de la courbe qui a pour équation $u = f(z)$, autour de l'axe des z. Un tel corps s'appelle, pour cela, *corps de révolution* ou *de rotation*, et l'axe des z s'appelle l'*axe de révolution* ou *de rotation*. La courbe formant le corps par sa révolution s'appelle aussi *courbe génératrice*.

L'aire du cercle dans la distance à l'origine des coordonnées $= z$ (73), étant $\pi u^2 = \pi[f(z)]^2$, le volume du

corps de révolution sera, d'après le n° 80,

$$= \pi \int [f(z)]^2 . dz,$$

c'est-à-dire que la différentielle du volume d'un corps de révolution est composée du quarré de l'ordonnée (u) de la courbe génératrice, multiplié par π et par la différentielle de l'axe de révolution.

Exemple I. Supposons qu'il se tourne une droite autour de l'axe des z; on aura $u = \alpha z + \beta$. Le corps ainsi engendré est, comme on voit, un cône droit qui a pour équation

$$y^2 + x^2 = (\alpha z + \beta)^2,$$

où $\frac{\beta}{\alpha}$ exprime la distance de l'origine des coordonnées au sommet du cône dans l'axe des z, et α la tangente trigonométrique de l'angle formé par le côté du cône avec l'axe des z. L'intégrale du volume sera

$$\pi \int (\alpha z + \beta)^2 dz = \frac{\pi \alpha^2 z^3}{3} + \alpha \beta \pi z^2 + \pi \beta^2 z + C.$$

Supposons que le volume soit $= 0$ au sommet du cône, où $z = \frac{-\beta}{\alpha}$, il vient $C = + \frac{\pi \beta^3}{3\alpha}$, et l'on a pour le volume du cône, depuis le sommet jusqu'à la hauteur z',

$$\frac{\pi \alpha^2}{3} z'^3 + \alpha \beta \pi z'^2 + \pi \beta^2 z' + \frac{\pi \beta^3}{3\alpha} = \frac{\pi}{3} (\alpha z' + \beta)^2 . \left(z' + \frac{\beta}{\alpha}\right),$$

résultat équivalent au tiers du produit de l'aire du cercle (regardé comme base) par la hauteur du cône, comme on sait par les élémens de la Géométrie.

Faisant, dans les équations de la droite, $\beta = 0$, c'est-à-dire transportant le sommet du cône à l'origine des coordonnées, on a pour le volume du cône, depuis le sommet

jusqu'à la hauteur z',

$$\frac{\pi a^2}{3}.z'^3 = \frac{\pi}{3} z'.a^2 z'^2.$$

Exemple II. Qu'il se tourne une ellipse dont les demi-axes sont a et b, ou autour de l'axe a, ou autour de l'axe b. Supposant que, chaque fois, l'axe des z soit celui de révolution, l'ellipse a, dans le premier cas, pour équation

$$u = \frac{b}{a}(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}},$$

et le corps ainsi engendré a pour équation

$$a^2x^2 + a^2y^2 + b^2z^2 = a^2b^2.$$

L'intégrale du volume de ce corps sera

$$\frac{b^2\pi}{a^2}\int(a^2 - z^2)\mathrm{d}z = b^2\pi z - \frac{b^2\pi}{3a^2}z^3 + \mathrm{C},$$

et donne par conséquent, prise depuis $z = +a$ jusqu'à $z = -a$, pour le volume entier du corps,

$$\frac{4ab^2\pi}{3}.$$

Dans le second cas, l'équation de l'ellipse est

$$u = \frac{a}{b}(b^2 - z^2)^{\frac{1}{2}},$$

et celle de l'ellipsoïde ainsi engendré,

$$b^2x^2 + b^2y^2 + a^2z^2 = a^2b^2.$$

Le volume de ce corps sera $= \frac{4ba^2\pi}{3}$. Par la supposition

de $b = a$, chacune des deux surfaces courbes devient une sphère.

A l'aide de ce qui a été dit jusqu'ici, le lecteur pourra aisément résoudre les problèmes suivans, en se servant des renseignemens qui y sont ajoutés.

Problème 1. Supposons qu'il se tourne une parabole ordinaire autour de son axe ; cette supposition donne $u^2 = pz$. On propose de trouver l'équation du *paraboloïde* engendré, puis de trouver son volume compris entre $z = 0$ et $z = z'$, et de déterminer en même temps le rapport de ce corps à un cylindre dont la hauteur $= z'$, et le rayon de la base $u' = p^{\frac{1}{2}} z'^{\frac{1}{2}}$.

Supposons qu'une hyperbole, dont l'équation est.... $u = \frac{b}{a}(z^2 + 2az)^{\frac{1}{2}}$, se tourne autour de son demi-axe a; elle engendrera ainsi l'*hyperboloïde*, qui a pour équation

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 2ab^2z - b^2z^2 = 0.$$

On trouvera que le volume entier de ce corps, pris depuis $z = 0$ jusqu'à $z = z'$, est

$$= \frac{b^2\pi z'^3}{3a^2} + \frac{b^2\pi z'^2}{a}.$$

Quelles valeurs auront lieu si $b = a$?

Supposons que la courbe considérée au n° 53, qui a pour équation $r^2u^2 = r^2z^2 - z^4$, se tourne autour de l'axe des z, c'est-à-dire autour du diamètre (dont la longueur $= 2r$) du cercle appartenant à la courbe (fig. 10).

On trouvera que le volume du corps de révolution ainsi engendré est la cinquième partie de la sphère engendrée par la rotation du cercle appartenant à la courbe.

Problème 2. Supposons qu'une parabole ordinaire se tourne autour de la tangente AH au sommet (fig. 9). On

a ici $u = \frac{z^2}{p}$; on propose de trouver l'équation du corps ainsi engendré, puis son volume compris entre $z = 0$ et $z = \text{AH} = z'$, et de le comparer avec le cylindre engendré par la révolution du rectangle appartenant, AM, autour de AH.

On propose de trouver les mêmes choses, lorsqu'un cercle, une ellipse ou une hyperbole se tournent autour de la tangente au sommet.

Problème 3. Supposons qu'un cercle, dont le rayon $= r$, se tourne autour d'une droite située au dehors de la circonférence et éloignée du centre de $r + h$. On a ici.... $u = h + r + (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$; on propose de trouver l'équation et le volume du corps annulaire engendré de cette manière. On propose de trouver les mêmes choses pour une parabole, une ellipse et une hyperbole.

82. Nous venons de voir que la cubature des corps de révolution dépend d'une seule intégration, par rapport à l'une des deux variables indépendantes; de plus, il suit du n° 80 que, par une telle intégration simple, on parvient à la cubature de tous les corps dont les sections parallèles aux plans coordonnés sont des courbes dont l'aire se peut exprimer sous une forme finie.

Le lecteur aura donc ici une bonne occasion d'augmenter ses connaissances des corps, en examinant soigneusement les corps de cette nature, par l'équation donnée, à l'aide du n° 77, et en cherchant ensuite leur volume par le n° 80.

Pour l'aider dans ces recherches, aussi utiles qu'agréables, nous ne proposons ici que les corps dont l'équation est de la forme

$$a^2y^2 + b^2x^2 = f(z).$$

Dans la hauteur indéterminée z, la section parallèle au

plan des xy est une ellipse dont les demi-axes sont

$$\frac{[f(z)]^{\frac{1}{2}}}{a} \quad \text{et} \quad \frac{[f(z)]^{\frac{1}{2}}}{b},$$

et dont l'aire est (73)

$$= \frac{\pi . f(z)}{ab}.$$

Le volume de ces corps est, en conséquence (80),

$$= \frac{\pi}{ab} \int dz . f(z).$$

En faisant, par exemple, $f(z) = r^4 - c^2 z^2$, on obtient le corps considéré n° 80, exemple II, où toutes les sections principales et secondaires sont des ellipses.

L'équation la plus générale des corps dont les sections parallèles aux plans coordonnés sont des ellipses, est de la forme

$$uy^2 + u'x^2 = u'',$$

où u, u', u'' sont des fonctions de z. L'ellipse formée par le plan coupant parallèle au plan coordonné des xy a pour ses demi-axes

$$\left(\frac{u''}{u'}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u''}{u}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et pour l'aire, $\frac{\pi . u''}{(u . u')^{\frac{1}{2}}}$. Le volume de ces corps est donc

$$\pi \int \frac{u'' . dz}{(u . u')^{\frac{1}{2}}}.$$

On peut déterminer les fonctions u, u', u'', de manière

que les sections parallèles au plan des yz, ou à celui des xz, soient des courbes données.

Soit, pour en rapporter un exemple, $u=m^2$, $u'=(m-z)^2$, $u''=r^2(m-z)^2$. On obtient ainsi l'équation

$$m-z=\frac{my}{(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

qui appartient au *coin-conoïde* que le géomètre Wallis a examiné le premier. La figure du corps répond tout-à-fait à sa dénomination ; il a, lorsque $z=0$, pour base un cercle du rayon $=r$, et il est terminé dans la hauteur $z=m$ par une ligne droite. Les sections parallèles au plan des yz sont des lignes droites; par où l'on voit que ce corps peut être regardé comme engendré par une droite qui, sur la circonférence d'un cercle, se meut parallèlement au plan des yz, pendant que l'autre extrémité de la droite s'appuie sur la ligne droite parallèle au cercle dans la hauteur $=m$.

Le volume, pris depuis $z=0$ jusqu'à $z=m$, est la moitié d'un cylindre de la même base et de la même hauteur.

De la Quadrature des surfaces courbes.

83. Désignons par s la portion de la surface courbe au-dessus du parallélogramme AM (fig. 18) dans le plan des xy; il est clair que, s étant une fonction de x et y, la portion au-dessus de PM′ sera égale à $\frac{\Delta s}{\Delta x}\Delta x$, celle au-dessus de QN sera égale à $\frac{\Delta s}{\Delta y}\Delta y$, et enfin la surface courbe au-dessus de MN′ sera égale à $\frac{\Delta^2 s}{\Delta x \Delta y}\Delta x \Delta y$. (*Comparez* n° 79.)

Menons en R un plan tangent à la surface courbe; les quatre plans menés par MM′, MN, NN′ et M′N′, perpendiculairement au plan des xy, couperont un parallélogramme sur ce plan tangent. Formons, de plus, un triangle avec les points R, S, R′, situés dans la surface courbe, et de même avec les points S, R′, S, un autre triangle; la diagonale SR′ sera alors le côté commun de ces deux triangles. Entre le plan tangent et les quatre côtés de ces deux triangles se formeront ainsi, sur les quatre plans menés par MM′, MN, NN′ et M′N′, deux trapèzes et deux triangles, que nous appellerons pour un moment, pour abréger, les quatre *pans*.

Cela posé, il est clair que la portion de la surface que nous avons exprimée par $\frac{\Delta^2 s}{\Delta x \Delta y}\Delta x \Delta y$, est plus petite que le parallélogramme dans le plan tangent, plus les quatre pans, et qu'elle est plus grande que la somme des deux triangles RSR′ et SR′S′. Or, la projection du parallélogramme dans le plan tangent, sur le plan des xy, est $= \Delta x . \Delta y$,

$$\text{sur celui des } xz, \quad = \Delta x \frac{dz}{dy}\Delta y = \Delta x . q . \Delta y \ (76),$$

$$\text{et sur celui des } yz, \quad = \Delta y . \frac{dz}{dx}\Delta x = \Delta y . p . \Delta x.$$

Donc le parallélogramme, compris dans le plan tangent est

$$= \Delta x . \Delta y (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}. \ (\textit{Voyez} \text{ n}^{\text{o}} \ 77.)$$

Les projections du triangle RSR′, sur les trois plans coordonnés des xy, des yz et des xz, sont respectivement

$$\frac{\Delta x . \Delta y}{2}, \quad \frac{\Delta y}{2}(\text{M}'\text{R}' - \text{MR}), \quad \frac{\Delta x}{2}(\text{NS} - \text{MR}),$$

et les projections de l'autre triangle RSS′ sont de même égales respectivement à

$$\frac{\Delta x.\Delta y}{2},\quad \frac{\Delta y}{2}(N'S'-NS),\quad \frac{\Delta x}{2}(N'S'-M'R').$$

En y substituant, pour MR, M'R', NS et N'S', leurs valeurs développées au n° 78, on obtient, pour la somme des deux triangles RSR' et R'SS',

$$\Delta x.\Delta y(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}+\downarrow\Delta x\Delta y,$$

où $\downarrow\Delta x\Delta y$ représente la somme de tous les termes dans lesquels Δx, Δy ou $\Delta x.\Delta y$ passent le premier degré.

Enfin, quant aux quatre figures que nous avons appelées plus haut les quatre pans, on voit aisément que les deux triangles, aussi bien que les deux trapèzes dont ils se composent s'exprimeront par des puissances de Δx et Δy, supérieures à la première, savoir, par les produits des prolongemens des ordonnées entre la surface courbe et le plan tangent (25). Nous désignerons, par conséquent, l'aire de ces quatre pans par $\downarrow'\Delta x\Delta y$ (d'après le n° 76).

On a ainsi

$$\frac{\Delta^2 s}{\Delta x\Delta y}>(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}+\downarrow \quad \text{et} \quad \frac{\Delta^2 s}{\Delta x\Delta y}<(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}+\downarrow';$$

de là, comme au n° 79,

$$\frac{d^2 s}{dx dy}=(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$d^2 s=dx.dy(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}=(dx^2.dy^2+dz^2.dy^2+dz^2.dx^2)^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire que la différentielle de la surface courbe est égale à la racine quarrée de la somme des quarrés du produit des différentielles des trois coordonnées, prises deux à deux.

donc,

$$\frac{dx}{dz} = \frac{u}{(u^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{du}{dz}.$$

On a, de plus,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{(u^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

on trouve donc

$$\left[1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{u}{(u^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{du}{dz}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

On a par conséquent à intégrer

$$\int\int \frac{dy\,dz.u\left[1 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{(u^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

en prenant d'abord la première intégrale $\int \frac{dy}{(u^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$ entre les limites $y = +u$ et $y = -u$ (puisque l'équation des corps de révolution donne $u^2 = y^2$ pour $x = 0$), on obtient, en doublant le résultat, 2π.

La seconde intégrale, à laquelle la quadrature de la surface des corps de révolution se réduit, est, en conséquence,

$$2\pi \int u\,dz \left[1 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

C'est au moyen de cette formule qu'on trouvera la surface courbe de tous les corps de révolution. Voici là-dessus quelques exemples.

Exemple I. Soit $u = \alpha z + \beta$ (*voyez* n° 81, exemple I);

de là $\frac{du}{dz} = \alpha$. L'intégrale de la surface courbe du cône droit est donc

$$2\pi \int u dz \left[1 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 2\pi(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} . \int (\alpha z + \beta) dz$$

$$= \alpha\pi(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} . z^2 + 2\beta\pi(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} . z + C.$$

Supposant la surface nulle au sommet du cône, où $z = \frac{-\beta}{\alpha}$, on a $C = \frac{\beta^2\pi}{\alpha}(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$, d'où l'on tire pour la surface du cône prise depuis le sommet jusqu'à la hauteur z',

$$\pi\alpha(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} . z'^2 + 2\beta(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} . \pi z' + \frac{\beta^2\pi(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha}$$

$$= \pi\alpha(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} . \left(z' + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{2\pi(\alpha z' + \beta)}{2}\left[\left(z' + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 . (1+\alpha^2)\right]^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire que cette surface est équivalente à la moitié du produit de la circonférence du cercle servant de base, par un côté du cône; ce qui est déjà connu par les élémens.

En faisant $\beta = 0$, on a pour la surface

$$\pi\alpha(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} . z'^2 = \frac{2\pi\alpha z'}{2} . z'(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple II. Supposons qu'une ellipse se tourne autour de l'un de ses demi-axes, que nous désignerons par a et b. (*Voyez* n° 81, exemple II.) En regardant chaque fois l'axe des z comme l'axe de révolution, on a, dans le cas de la révolution autour de a,

$$u = \frac{b}{a}(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{du}{dz} = \frac{-bz}{a(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}};$$

l'intégrale de la surface est donc

$$\frac{2\pi b}{a^2}\int(a^4 - a^2z^2 + b^2z^2)^{\frac{1}{2}}dz,$$

ou, en mettant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$= \frac{2\pi b}{a^2}\int dz(a^4 - c^2z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (65)$$

$$= \frac{\pi bz}{a^2}(a^4 - c^2z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi ba^2}{c}.\text{arc}\left(\sin = \frac{cz}{a^2}\right) + C.$$

En prenant cette intégrale depuis $z = 0$ jusqu'à $z = +a$, et multipliant par 2, on obtient pour la surface demandée

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi ba^2}{c}.\text{arc}\left(\sin = \frac{c}{a}\right).$$

Mais si l'ellipse se tourne autour de l'axe b, on a

$$u = \frac{a}{b}(b^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{-az}{b(b^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}};$$

l'intégrale devient, en mettant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$\frac{2\pi a}{b^2}\int dz(b^4 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}} \quad [65, (B)]$$

$$= \frac{\pi a}{b^2}z(b^4 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}} + \pi ab^2\int\frac{dz}{(b^4 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

[en faisant, d'après le n° 63, $(b^4 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}} = -cz + t$, et remettant ensuite la valeur de t, en z],

$$= \frac{\pi a}{b^2}z(b^4 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi ab^2}{c}\log[cz + (b^4 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}}] + C.$$

En prenant cette intégrale depuis $z = 0$ jusqu'à $z = +a$,

et multipliant par 2, on obtient pour la surface cherchée

$$\frac{2\pi a^2}{b^2}(b^4+a^2c^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{2\pi ab^2}{c}\log\left[\frac{ac+(b^4+a^2c^2)^{\frac{1}{2}}}{b^2}\right].$$

Dans l'une et l'autre de ces deux expressions de la surface, le second terme devient $\frac{0}{0}$, lorsque $a=b$ ou $c=0$, et reçoit alors pour vraie valeur (*voyez* n° 35, exemple I, et n° 37, exemple III) $2\pi a^2$; donc, la surface de la sphère du rayon $=a$ devient $4\pi a^2$, ainsi que nous avons déjà montré n° 83.

Exemple III. Pour le paraboloïde (*voyez* n° 81, problème 1), on a

$$u=p^{\frac{1}{2}}.z^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dz}=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{2z^{\frac{1}{2}}}.$$

L'intégrale de l'aire de la surface courbe est donc

$$p^{\frac{1}{2}}\pi\int dz(p+4z)^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi p^{\frac{1}{2}}}{3.2}(p+4z)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Supposant l'aire $=0$, au sommet, il vient $C=\frac{-\pi p^2}{3.2}$; donc, l'intégrale déterminée devient

$$\frac{\pi p^{\frac{1}{2}}}{3.2}[(p+4z)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}].$$

Quelle sera la valeur de la surface, depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{3p}{4}$, et quel sera son rapport à celle du cylindre qui a pour hauteur l'abscisse z, et pour base un cercle dont le rayon est égal à l'ordonnée de la parabole génératrice?

Exemple IV. Supposons qu'une hyperbole, qui a pour

équation $u = \frac{b}{a}(z^2 + 2az)^{\frac{1}{2}}$, se tourne autour de son demi-axe a.

L'équation du corps ainsi engendré est déjà donnée n° 81, problème 1. L'intégrale de la surface est

$$\frac{2\pi b}{a^2}\int dz(c^2z^2 + 2ac^2z + a^2b^2)^{\frac{1}{2}},$$

où $c^2 = a^2 + b^2$; on pourra intégrer cette expression par le n° 63.

Exemple V. Soit $u = \frac{1}{r}z(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$. (*Voyez* n° 81, problème 1.)

On obtient, pour l'intégrale cherchée de la surface,

$$\frac{2\pi}{r^2}\int zdz(2r^4 - 5r^2z^2 + 4z^4)^{\frac{1}{2}}.$$

En y faisant $z^2 = t + \frac{5}{8}r^2$, il vient

$$\frac{\pi}{r^2}\int dt\left(\frac{7r^4}{16} + 4t^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On exprimera cette intégrale, ou par des logarithmes, d'après les n°s 63 et 65, ou par le moyen d'une série, d'après le n° 67, en développant le radical $\left(\frac{7r^4}{16} + 4t^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

L'expression de la surface des deux derniers corps de révolution, comme celle des corps dont nous avons enseigné à trouver l'équation et le volume au n° 81, étant transcendante, ne se peut obtenir algébriquement que par approximation, au moyen des séries. Le lecteur fera bien de développer l'intégrale pour quelques-uns de ces corps.

De la Différenciation des équations implicites à deux variables.

85. Nous avons traité, au commencement du Calcul différentiel, les équations explicites à deux variables, dont l'une, savoir la dépendante y, se trouve seule à l'un des membres de l'équation (4); parlons maintenant de la différenciation d'une expression où les deux variables y et x se trouvent mixtes ensemble, c'est-à-dire parlons de la différenciation d'une *équation implicite* à deux variables.

On a, d'après le n° 6, puisque y renferme l'indépendante x,

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx = p\,dx,$$

et en désignant par Y une fonction immédiate de y et médiate de x, on a, d'après le n° 10,

$$dY = \frac{dY}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx = \frac{dY}{dy}\cdot p\,dx = \frac{dY}{dy}\,dy.$$

Mais on obtient $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dY}{dy}$, par les règles données au commencement du Calcul différentiel, et il s'ensuit en même temps qu'il faut différencier une fonction implicite de y et de x, de manière à regarder y et x tout-à-fait comme indépendans l'un de l'autre.

Désignant pour cela, tout généralement, une équation à deux variables x et y, par $u = 0$, on a (d'après le n° 76) pour sa différentielle

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy = 0.$$

On en tire, en divisant par dx et mettant p à la place de $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}p = 0.$$

Exemple. Soit proposée l'équation $x^2y - y^2x - c = 0$. La différentielle sera (nos 11, 12)

$$2xydx + x^2dy - 2xydy - y^2dx = 0,$$

ou, en divisant par dx et écrivant p au lieu de $\frac{dy}{dx}$,

$$2xy + x^2p - 2xyp - y^2 = 0.$$

On voit par là que la différentielle d'une équation implicite de x et de y prend la forme suivante,

$$Pdx + Qdy = 0, \quad \text{ou} \quad P + Qp = 0,$$

où P et Q sont des fonctions de x et de y.

Pour la différenciation ultérieure de la différentielle $P + Qp = 0$, qui s'appelle aussi la *différentielle première*, ou la *différentielle du premier ordre*, on observera qu'on aura, p étant une fonction de x (15),

$$dp = qdx.$$

Or, on a, P et Q étant des fonctions de x et y (76),

$$dP = \frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy \quad \text{et} \quad dQ = \frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy,$$

ou, à cause de $dy = pdx$,

$$dP = \frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}pdx \quad \text{et} \quad dQ = \frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}pdx.$$

La différentielle de l'équation $P + Qp = 0$ sera donc

après avoir divisé par dx,

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}p + p\frac{dQ}{dx} + p^2\frac{dQ}{dy} + Qq = 0.$$

La forme générale de la différentielle de la différentielle, ou de la différentielle seconde (différentielle du second ordre) d'une fonction implicite de x et de y, sera donc

$$P' + Q'p + Q''p^2 + Q'''q = 0,$$

où P', Q', Q'', Q''' renferment x et y.

La différentielle seconde de l'équation considérée ci-dessus,

$$x^2y - y^2x = c,$$

sera, après avoir divisé par dx,

$$2y + 4p(x - y) - 2xp^2 + q(x^2 - 2xy) = 0.$$

On déduira de la différentielle seconde, la différentielle troisième, en regardant, outre y et p, encore q comme une fonction de x, et écrivant $dq = rdx$ (15).

Il est aisé d'étendre ces considérations aux différentielles des ordres supérieurs, et l'on sera en état de déterminer aisément leurs formes générales.

Le lecteur développera sans peine les différentielles de l'ordre troisième et quatrième de l'équation traitée ci-dessus, $x^2y - y^2x - c = 0$; aussi propose-t-on de s'exercer, dans le même but, sur la fonction $x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = c$.

86. C'est d'une double manière qu'on peut dériver d'une équation primitive à deux variables x et y, *une équation différentielle* du premier ordre, c'est-à-dire une équation entre x, y, dx et dy. Premièrement, c'est la différenciation de la primitive qui donne immédiatement une équation différentielle, qu'on appelle aussi, pour cela, *équation différentielle immédiate* (ou complète). Ce genre

d'équations a été considéré au numéro précédent. Secondement, en éliminant une constante entre l'équation primitive et sa différentielle, on parvient également à une équation différentielle qu'on appelle *équation différentielle médiate* du premier ordre.

Soit, par exemple, la primitive $ax - xy = by$. La différentielle immédiate en est

$$a - y - xp = bp.$$

En éliminant entre ces deux équations successivement a et b, on parvient à ces deux équations différentielles médiates du premier ordre :

$$by - x^2p = bxp \quad \text{et} \quad ay - y^2 = axp.$$

En éliminant une constante entre une équation différentielle médiate du premier ordre et sa différentielle, on obtient une *équation différentielle médiate du second ordre*, et ainsi de suite.

Ainsi, en éliminant entre chacune des deux équations différentielles développées dans l'exemple précédent, et leur différentielle, les quantités a et b, on obtient l'équation

$$-2py + 2xp^2 = xyq,$$

équation qui est par conséquent l'équation différentielle médiate du second ordre de la primitive $ax - xy = by$.

Cette équation primitive, renfermant deux constantes, a donc deux équations différentielles médiates du premier, et une du second ordre.

De la même manière, une équation primitive renfermant trois constantes, aura trois différentes équations différentielles médiates du premier ordre, dont chacune renferme deux constantes ; trois différentes équations différentielles médiates du second ordre, dont chacune renferme une

constante; et enfin, une équation différentielle médiate du troisième ordre.

Le lecteur prouvera sans difficulté que le nombre des différentes équations différentielles médiates, dans les divers ordres, d'une équation primitive qui renferme n constantes, s'exprime successivement par les coefficiens du binome de la puissance n (16). On propose au lecteur de s'exercer sur l'équation $ax^2 - by^2 = cxy$, en en cherchant les équations différentielles successives.

Il est à propos de remarquer qu'on peut obtenir sur-le-champ l'équation différentielle médiate, sans qu'il soit besoin d'éliminer une constante entre l'équation primitive et sa différentielle, si l'on différencie l'équation primitive après avoir dégagé la constante qu'elle renferme, de sorte que la constante se trouve seule à l'un des membres de l'équation. C'est ainsi, par exemple, qu'on déduit de l'équation traitée ci-dessus $ax - xy = by$, celle-ci :

$$\frac{ax - xy}{y} = b;$$

en différenciant, il vient

$$\frac{ay - y^2 - axp}{y^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad ay - y^2 - axp = 0,$$

également, comme nous avons trouvé ci-dessus, pour l'équation différentielle médiate. Voilà ainsi l'équation différentielle immédiate changée en médiate, en la multipliant par le facteur $\frac{1}{y^2}$. Or, la séparation de la constante dans une équation primitive peut être regardée, en général, comme possible; donc, il est clair que toute équation différentielle médiate se peut transformer en immédiate, en la multipliant par un facteur.

Si dans une primitive, comme dans celle que nous avons traitée n° 85, $x^2y - y^2x = c$, la constante qui se trouve déjà dégagée, disparaît par la différenciation, l'équation différentielle immédiate est en même temps l'équation différentielle médiate.

Voilà donc établies, par ce qui précède, ces deux propositions : premièrement, que toute équation médiate peut être changée en immédiate par la multiplication par un facteur; secondement, que toute équation immédiate peut être regardée comme une médiate dont le facteur est constant; c'est pour cela qu'on appelle toute équation différentielle médiate, par préférence, *équation différentielle*.

Intégration des équations différentielles immédiates à deux variables, du premier ordre.

87. Une équation différentielle à deux variables x et y, du premier ordre, s'exprime, en général, comme nous avons vu au n° 85, ainsi :

$$Pdx + Qdy = 0.$$

Nous pourrons donc exprimer une telle équation différentielle, si elle est immédiate, par

$$Pdx + Qdy = du,$$

où u représente la fonction primitive de x et y, dont $Pdx + Qdy$ est la différentielle. Comme la différenciation de la primitive u, à ce que nous avons vu au n° 8, s'effectue en y regardant x et y comme tout-à-fait indépendans l'un de l'autre, il faut envisager u comme une fonction de deux variables x et y, indépendantes entre elles; et l'on aura d'après cela, comme nous avons prouvé au n° 76, pour les équations de ce genre,

premièrement, $\frac{du}{dx} = P$, $\frac{du}{dy} = Q$,

et secondement, $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}$, ou $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Cette dernière équation servira aussi à reconnaître si une équation différentielle proposée est ou non immédiate (76).

Quant à l'intégration de l'équation

$$Pdx + Qdy = du,$$

on a d'abord

$$u = \int Pdx + Y,$$

où l'intégrale ne se prend que par rapport à x, Y tenant lieu de la constante arbitraire qu'il faut ajouter à chaque intégrale (57), et qui renferme ici la variable y. En différenciant cette expression par rapport à y (76), il vient

$$\frac{du}{dy} = \frac{d\int Pdx}{dy} + \frac{dY}{dy},$$

ou, puisqu'on a, d'après ce qui précède, $\frac{du}{dy} = Q$,

$$Q = \frac{d\int Pdx}{dy} + \frac{dY}{dy},$$

de là

$$\frac{dY}{dy} = Q - \frac{d\int Pdx}{dy},$$

et (en intégrant par rapport à y)

$$Y = \int dy\left(Q - \frac{d\int Pdx}{dy}\right),$$

où l'expression dans la parenthèse, Y ne renfermant que y et $\frac{du}{dx}$ étant $= P$, ne peut contenir que y.

On obtient donc pour l'équation primitive cherchée,

$$u = \int P dx + \int dy \left(Q - \frac{d\int P dx}{dy}\right).$$

(On voit d'ailleurs qu'il revient au même d'ajouter la constante arbitraire après la première intégration par rapport à x, ou après la seconde par rapport à y.) Or, on a

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d.\frac{Pdx}{dx}}{dy} = \frac{d\,\frac{d\int Pdx}{dx}}{dy} = (\text{n}^\circ\ 76)\ \frac{d^2\int Pdx}{dxdy}$$

$$= \frac{d^2\int Pdx}{dydx} = \frac{d.\frac{d\int Pdx}{dy}}{dx}\ (\text{n}^\circ\ 76).$$

On a donc

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d\,\frac{d\int Pdx}{dy}}{dx}, \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dy}\,dx = \frac{d\,\frac{d\int Pdx}{dy}}{dx}.dx,$$

ou enfin, en intégrant par rapport à x,

$$\int \frac{dP}{dy}\,dx = \frac{d\int Pdx}{dy}.$$

On peut, par conséquent, exprimer aussi l'intégrale cherchée par

$$u = \int Pdx + \int dy \left(Q - \int \frac{dP}{dy}\,dx\right).$$

Voici quelques exemples sur ce que nous venons de dire.

Exemple I. Soit $\frac{x}{y}\,dx + \frac{(y^2 - x^2)}{2y^2}\,dy = 0$. On a ici

$$P = \frac{x}{y}, \quad Q = \frac{y^2 - x^2}{2y^2};$$

il vient

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = \frac{-x}{y^2}.$$

L'équation proposée est, par conséquent, une différentielle immédiate. On a, de plus,

$$\int P dx = \int \frac{x dx}{y} = \frac{x^2}{2y},$$

$$\frac{d\int P dx}{dy} = \frac{-x^2}{2y^2}, \quad Q - \frac{d\int P dx}{dy} = \frac{1}{2};$$

donc,

$$Y = \int \frac{dy}{2} = \frac{y}{2} + C.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$\frac{x^2}{2y} + \frac{y}{2} + C, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 + y^2}{2y} = c.$$

Exemple II. Soit $\dfrac{2xy dx - x^2 dy}{y(y^2 - x^4)} = 0.$

On a

$$P = \frac{2x}{(y^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}, \quad Q = \frac{-x^2}{y(y^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

On trouve

$$\frac{dP}{dy} = \frac{-2xy}{(y^2 - x^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dQ}{dx}.$$

Or, on a

$$\int P dx = \text{arc}\left(\sin = \frac{x^2}{y}\right) \text{ (n}^{\text{os}}\text{ 64, 66)},$$

$$\frac{d\int P dx}{dy} = \frac{-x^2}{y(y^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}, \quad Q - \frac{d\int P dx}{dy} = 0;$$

donc, $Y = c$. (*Voyez* n° 8.)

L'intégrale cherchée est, d'après cela,

$$c = \text{arc}\left(\sin = \frac{x^2}{y}\right).$$

Le lecteur s'exercera encore sur les exemples suivans :

Exemple III. $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = 0.$

Exemple IV. $\dfrac{(2x^2 + y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.$

Exemple V. $\dfrac{x\mathrm{d}x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{d}y\left[1 + \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0.$

Intégration des équations différentielles médiates à deux variables, du premier ordre.

88. On pourrait intégrer toute équation différentielle médiate du premier ordre, si l'on savait trouver le facteur qui la change en immédiate (86). Mais il est, en général, impossible, du moins d'après ce que nous avons exposé jusqu'ici, de trouver ce facteur. Pour s'en convaincre, désignons par z le facteur appartenant à l'équation $\mathrm{P}\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\mathrm{d}y = 0$; l'équation par laquelle il faudrait alors chercher z, serait

$$\frac{\mathrm{d}.(z.\mathrm{P})}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}.(z.\mathrm{Q})}{\mathrm{d}x} \quad (\text{n}^\circ\ 87),$$

ou développée,

$$\mathrm{P}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} - \mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z.\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{Q}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\mathrm{P}}{\mathrm{d}y}\right).$$

Cette équation différentielle, qui contient, outre x, y

et z, encore les deux coefficiens différentiels partiels de z (76), est du nombre des équations à trois variables, dont il ne s'agira que plus bas, aux n°s 100 et 101.

Il ne reste qu'une seule voie pour l'intégration des équations différentielles médiates, c'est la séparation des variables; mais cette séparation ne saurait s'effectuer que dans le cas où, dans l'équation $Pdx + Qdy = 0$, P, aussi bien que Q, est un produit de deux facteurs, dont l'un ne renferme que x et l'autre y, c'est-à-dire quand l'équation différentielle proposée est de la forme

$$XYdx + X'Y'dy = 0,$$

où X et X′ ne contiennent que x, et Y et Y′ ne contiennent que y.

En divisant, dans ce cas, l'équation par YX′, on obtiendra

$$\frac{X}{X'}dx + \frac{Y'}{Y}dy = 0.$$

Cette équation, où les variables sont séparées, est intégrable par la première section du calcul intégral, qui traite les équations différentielles explicites à deux variables.

Exemple. Soit à intégrer $ydx - xdy = 0$. Divisant par yx, il vient

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0;$$

l'intégrale en est

$$\log x - \log y = \log c, \quad \text{ou} \quad \log\frac{x}{y} = \log c,$$

$$\text{ou} \quad \frac{x}{y} = c, \quad \text{ou encore} \quad x = cy.$$

Une substitution convenable sert aussi souvent à donner

à une équation différentielle la forme indiquée, sous laquelle la séparation des variables devient possible. Nous ferons voir, dans ce qui suit, pour quelques formes des équations différentielles, les substitutions nécessaires.

Forme première. Si, dans l'équation $Pdx + Qdy = 0$, P et Q sont des fonctions homogènes par rapport à x et y, du degré m, par exemple, il faut faire $y = x.z$, d'où l'on tire $dy = xdz + zdx$. On parvient par là à l'équation

$$x^m Zdx + x^m Z'(zdx + xdz) = 0,$$

où Z et Z' désignent des fonctions de z. Divisant par x^m, il vient

$$(Z + Z'z)dx + Z'xdz = 0.$$

On effectuera maintenant, en divisant par $x.(Z + Z'z)$, la séparation des variables.

Exemple. Soit proposée l'équation homogène du second degré,

$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0.$$

En mettant $y = x.z$ et $dy = xdz + zdx$, et divisant ensuite par x^2, on aura

$$z(1 + z^2)dx + x(z^2 - 1)dz = 0;$$

de là, en divisant par $xz(1 + z^2)$,

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)}dz,$$

ou, d'après le n° 59,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} - \frac{2zdz}{1 + z^2}.$$

On obtient donc, pour l'intégrale,

$$\log x = \log z - \log(1 + z^2) + \log c,$$

ou $x = \frac{cz}{1+z^2}$, ou, en remettant $\frac{y}{x}$ à la place de z,

$$x^2 + y^2 = cy.$$

Forme deuxième. Si, dans l'équation

$$dy + Pydx = Qdx,$$

P et Q ne renferment que x, on mettra $y = u.z$; donc, $dy = udz + zdu$, où u et z sont des fonctions arbitraires de x. On obtient

$$udz + zdu + Puzdx = Qdx.$$

Mettant dans cette équation $udz + Puzdx = 0$, on aura aussi $zdu = Qdx$. De la première de ces deux équations on tirera, en séparant les variables,

$$\frac{dz}{z} + Pdx = 0,$$

d'où

$$\log z = -\int Pdx, \quad \text{ou} \quad z = e^{-\int Pdx}.$$

Cette valeur de z substituée dans la seconde équation $zdu = Qdx$, il vient

$$e^{-\int Pdx} du = Qdx,$$

d'où

$$u = \int e^{\int Pdx}.Qdx + C.$$

De là on tire enfin

$$y = uz = e^{-\int Pdx}(\int e^{\int Pdx}.Qdx + C).$$

On voit aisément qu'il n'est besoin que d'ajouter une constante à la seconde intégrale qui donne la valeur de u, ainsi qu'il a été fait ci-dessus. Si l'on voulait donner

une constante aussi à la première intégrale, on aurait

$$z = e^{-\int P dx - c'}, \quad u = \int e^{\int P dx + c'} . Q dx + C,$$

ou, en mettant $C = e^{c'} . c''$,

$$u = e^{c'} (\int e^{\int P dx} . Q dx + c'');$$

de là, à cause de $e^{-c'} . e^{c'} = 1$, on tomberait sur la même expression de y que ci-dessus.

Exemple. Soit à intégrer $dy + \frac{y}{x} dx = x^m dx$. On a ici

$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = x^m; \quad \text{donc} \quad \int P dx = \int \frac{dx}{x} = \log x,$$

$$e^{\int P dx} = e^{\log x} = x, \quad e^{-\int P dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x},$$

$$\int e^{\int P dx} . Q dx = \int x^{m+1} dx = \frac{x^{m+2}}{m+2} + C;$$

de là

$$y = \frac{1}{x} \left(\frac{x^{m+2}}{m+2} + C \right).$$

Voici encore quelques problèmes qui serviront au lecteur pour l'application de ce que nous venons d'exposer dans ce numéro.

Problème 1. Soit à intégrer

$$(a + mx + ny) dx + (a' + m'x + n'y) dy = 0.$$

On fera d'abord $x = \alpha + t$, $y = \beta + u$; en mettant ensuite

$$a + m\alpha + n\beta = 0 \quad \text{et} \quad a' + m'\alpha + n'\beta = 0,$$

par où l'on pourra alors déterminer α et β, on parvient à

une équation homogène, sur laquelle on opérera d'après la *forme première*.

Dans le cas où α et β deviennent tous deux infinis, ou, ce qui revient au même, si $mn' = nm'$, il faut recourir à l'équation différentielle proposée, qui devient alors

$$a\mathrm{d}x + a'\mathrm{d}y + (mx + ny)\left(\mathrm{d}x + \frac{m'}{m}\mathrm{d}y\right) = 0.$$

On y séparera les variables, en faisant $mx + ny = z$.

Problème 2. Soit à intégrer

$$\mathrm{P}y^{m-1}\mathrm{d}y + \mathrm{Q}y^{m}\mathrm{d}x = \mathrm{R}y^{n}\mathrm{d}x,$$

où P, Q, R ne renferment que x.

Après avoir divisé l'équation par $\mathrm{P}y^{n}$, on mettra... $\frac{y^{m-n}}{m-n} = z$. On parviendra ainsi à l'équation traitée ci-dessus (*forme deuxième*).

Soit, par exemple,

$$\mathrm{P} = x^{2}, \quad \mathrm{Q} = x, \quad \mathrm{R} = x^{m}.$$

Problème 3. On demande la condition pour que le facteur qui change une équation différentielle médiate en immédiate ne contienne qu'une seule des deux variables x et y.

On a, dans l'équation rapportée au commencement de ce numéro,

$$\mathrm{P}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} - \mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z.\left(\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}y}\right),$$

dans la supposition que z ne contienne que x, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 0$; donc,

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{\mathrm{Q}}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x.$$

L'expression $\frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)$ ne doit, par conséquent, renfermer que x.

Quelle sera la condition pour que z ne renferme que y?

On se servira, pour l'application, de l'équation déjà traitée plus haut,

$$dy + Pydx = Qdx.$$

Problème 4. Soit proposé de déterminer, dans l'équation

$$dy + (ay^2 + P)dx = 0,$$

P, qui est une fonction de x, pour que l'équation devienne une équation différentielle immédiate, par le facteur $\frac{1}{(\alpha+\beta y)^2}$, où α et β ne renferment que x.

Donc, dans cette hypothèse, l'équation

$$\frac{dy}{(\alpha+\beta y)^2}+\frac{(ay^2+P)dx}{(\alpha+\beta y)^2}=0$$

doit être une équation différentielle immédiate.

L'équation de condition

$$\frac{d.\frac{1}{(\alpha+\beta y)^2}}{dx}=\frac{d.\frac{ay^2+P}{(\alpha+\beta y)^2}}{dy}$$

(*voyez* plus haut, au commencement de ce numéro) donne, développée et ordonnée suivant y (76),

$$0=\frac{d\alpha}{dx}-\beta P+\left(\frac{d\beta}{dx}+a\alpha\right)y;$$

de là

$$\frac{d\alpha}{dx}-\beta P=0,\quad \frac{d\beta}{dx}+a\alpha=0.$$

De la seconde équation on tire

$$\alpha = -\frac{1}{a}\cdot\frac{d\beta}{dx}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\alpha}{dx} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{d^2\beta}{dx^2}.$$

Cette valeur, substituée dans la première équation, donne l'équation

$$P = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{d^2\beta}{dx^2},$$

qui détermine P seulement par β.

Soit, par exemple, $\beta = e^u$, $u = x^n$; donc, $\beta = e^{x^n}$; on trouve

$$P = -\frac{1}{a}nx^{n-2}(nx^n + n - 1).$$

L'équation

$$dy + ay^2dx = \frac{n}{a}x^{n-2}(nx^n + n - 1)dx$$

se change, par conséquent, par le facteur

$$\frac{1}{e^{2(x^n)}\cdot\left(y - \frac{n}{a}x^{n-1}\right)^2},$$

en une équation différentielle immédiate, dont le lecteur pourra trouver l'intégrale par le n° 87.

Des Équations différentielles à deux variables, du premier ordre, dans lesquelles les différentielles passent le premier degré.

89. Il arrive souvent que, dans les équations différentielles du premier ordre, les différentielles passent le premier degré. Voyons d'abord, dans un exemple, comment les équations de ce genre se forment, également que celles que nous venons de considérer, par l'élimination d'une

quantité constante (86). Soit l'équation primitive

$$(y-c)^2=\frac{x^3}{a},$$

dont la différentielle

$$2dy(y-c)=3\frac{x^2}{a}dx, \quad \text{ou} \quad 2p(y-c)=\frac{3x^2}{a};$$

en éliminant c entre les deux équations, on obtient l'équation différentielle

$$9x=4ap^2, \quad \text{ou} \quad 9xdx^2=4ady^2.$$

La méthode pour l'intégration des équations différentielles de ce genre se fera connaître plus clairement par l'exemple suivant.

Soit donnée l'équation

$$dy^2-a^2dx^2=0;$$

on peut la mettre sous la forme suivante :

$$(dy-adx).(dy+adx)=0.$$

En égalant à zéro séparément chacun de ces deux facteurs et intégrant, on trouve

$$y-ax+c=0 \quad \text{et} \quad y+ax+c'=0.$$

Chacune de ces deux intégrales, satisfaisant à l'équation différentielle proposée et renfermant une constante arbitraire, sera donc l'intégrale de l'équation différentielle proposée. En différenciant le produit de ces deux intégrales, savoir,

$$(y-ax+c)(y+ax+c')=0,$$

on trouve

$$0 = (dy - adx)(y + ax + c') + (dy + adx)(y - ax + c),$$

et en éliminant, entre ces deux équations, l'une des deux constantes c et c', l'autre disparaît en même temps, et l'on arrive, par cela, successivement aux équations

$$dy = adx \quad \text{et} \quad dy = -adx,$$

dont chacune, élevée au quarré, sera l'équation différentielle proposée. Ainsi le produit indiqué satisfait, à la vérité, à l'équation différentielle proposée, mais seulement parce que l'élimination de l'une quelconque des constantes fait en même temps disparaître l'autre constante; il ne saurait donc être l'intégrale demandée (86).

On étendra aisément ces considérations aux équations différentielles, où les différentielles se trouvent à un degré quelconque. Soit tout généralement n l'exposant le plus élevé des différentielles dans une équation qui, après avoir divisé par dx^n et mis p à la place de $\frac{dy}{dx}$, sera représentée par

$$p^n + Pp^{n-1} + Qp^{n-2} + \ldots + U = 0,$$

où P, Q....U sont des fonctions de x et y. En résolvant cette équation par rapport à p, et désignant ses racines par α, β, γ..., on obtient, au lieu de l'équation proposée,

$$(p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma)\ldots\ldots = 0;$$

l'intégrale de chacun de ces facteurs sera l'intégrale demandée. Le produit des intégrales de tous ces facteurs satisfait, comme on prouvera aisément, à l'équation proposée, puisqu'en chassant l'une des n constantes, les autres disparaissent par elles-mêmes.

La méthode que nous venons de donner étant sujette à

toutes les difficultés que la résolution des équations fait éprouver, on emploie souvent avec succès quelques artifices particuliers, mais qui lèvent très rarement tout-à-fait ces difficultés, comme on le verra clairement par ce qui suit.

I. Soit, dans une équation différentielle, y seulement au premier degré, de sorte qu'on ait, en différenciant,

$$dy = Qdx + Rdp,$$

où Q et R ne renferment que x et p. En y faisant $dy = pdx$, il vient

$$(p - Q)dx = Rdp;$$

on n'aura maintenant qu'à éliminer p entre l'intégrale de cette équation et l'équation différentielle proposée, pour parvenir à l'intégrale demandée.

Nous allons examiner en particulier deux formes des équations différentielles de cette espèce.

Forme première. Si l'équation différentielle proposée est de la forme

$$y = px + P,$$

où P est une fonction de p, on a

$$dy = pdx + xdp + \frac{dP}{dp}dp,$$

ou (puisque $dy = pdx$) $o = \left(x + \frac{dP}{dp}\right)dp$, d'où l'on tire

$$dp = o, \quad \text{et en même temps} \quad x + \frac{dP}{dp} = o.$$

Il résulte de $dp = o$ que $p = c$, et l'on obtient par cela,

en substituant dans l'équation proposée l'intégrale cherchée,

$$y = cx + C,$$

C étant ce que devient P en y mettant c à la place de p.

Mais en éliminant p entre l'équation proposée et entre

$$x + \frac{dP}{dp} = 0,$$

on obtient aussi une équation primitive; cette équation, ne contenant pas de constante, ne peut être l'intégrale cherchée. Le rapport de cette équation à l'intégrale sera exposé de plus près au numéro suivant.

Exemple. Soit $y - px = n(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$. On a

$$P = n(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dP}{dp} = \frac{np}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

De l'équation $x + \frac{dP}{dp} = x + \frac{np}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$, on tire

$$p = \frac{-x}{(n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On voit qu'il faut prendre ici le radical du signe négatif, parce que l'équation $x + \frac{np}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$, de laquelle la valeur de p a été tirée, n'est satisfaite que dans cette supposition; car il faut prendre le radical de l'équation proposée, savoir $(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$, du même signe partout le calcul, dans notre cas, du signe positif. (*Comparez* n° 53.) La valeur de p, substituée dans l'équation proposée, donne

$$y = (n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{pdy + ydp}{2p^2} = \frac{3a(pdy + ydp)}{2(yp)^4},$$

ou enfin

$$(pdy + ydp)\left(1 - \frac{3a}{p^2y^4}\right) = 0.$$

En prenant d'abord $pdy + ydp = 0$, d'où $yp = c$, et substituant cette valeur dans l'équation proposée, on a pour l'intégrale

$$y^2 - 2cx - \frac{a}{c^2} = 0.$$

En éliminant p entre $1 - \frac{3a}{p^2y^4} = 0$ et l'équation proposée, on obtient

$$y^6 = 27ax^2,$$

équation primitive, mais qui diffère de l'intégrale. [*Voyez* ci-dessus, (I) forme première.]

III. Si une équation où p se trouve en puissance plus élevée était homogène par rapport à x et y, on mettrait $y = ux$, d'où $dy = udx + xdu$, ou $pdx = udx + xdu$; on en tire

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u};$$

on a ainsi

$$x = e^{\int \frac{du}{p-u}} \quad \text{et} \quad y = u.e^{\int \frac{du}{p-u}}.$$

Pour effectuer cette intégration, on déterminera, au moyen de l'équation proposée qui, après la substitution de ux au lieu de y, ne renferme que u et p, ou u par p, ou p par u, selon que l'un ou l'autre sera plus convenable. L'élimination de p entre les deux valeurs de x et y, ou entre

l'une ou l'autre de ces valeurs et l'équation proposée, donnera l'intégrale cherchée.

Exemple. Soit $yp^2 - xp^3 = x$; en faisant $y = ux$, il vient

$$up^2 - p^3 = 1, \quad \text{d'où} \quad u = \frac{1+p^3}{p^2}$$

et

$$\int \frac{du}{p-u} = \int \frac{(2-p^3)dp}{p} = \log p^2 - \frac{p^3}{3};$$

on a, par conséquent,

$$x + c = \frac{p^2}{e^{\frac{p^3}{3}}}.$$

L'élimination de p, entre cette équation et la proposée, conduit à l'intégrale demandée.

Des Solutions particulières et des Courbes enveloppantes.

90. Nous avons vu, n° 86, que toute équation différentielle du premier ordre peut être regardée comme formée par l'élimination d'une constante entre l'équation primitive et sa différentielle. En désignant, d'après cela, l'équation primitive par

$$u = 0,$$

et sa différentielle, savoir, $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0$ (n° 85), par

$$u' = 0,$$

on formera l'équation différentielle, que nous désignerons par

$$u_{,} = 0,$$

par la combinaison des équations $u = 0$ et $u' = 0$.

Regardant maintenant, dans l'équation primitive, outre x et y, encore c comme variable, on aura pour la différentielle de la primitive

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dc}dc = 0 \text{ (n° 85).}$$

En mettant ensuite

$$\frac{du}{dc} = 0,$$

$\left(\text{d'où il suit } \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = u' = 0\right)$, et éliminant c entre les équations $u = 0$ et $\frac{du}{dc} = 0$, on obtient une nouvelle équation primitive que nous désignerons par

$$v = 0.$$

Quoique cette équation, puisqu'elle ne renferme pas c, soit différente de la primitive $u = 0$, elle est pourtant, aussi bien que sa différentielle (l'une et l'autre étant déduites de $u = 0$ et de $\frac{du}{dc} = 0$), correspondante avec l'équation différentielle $u_{,} = 0$, déduite de $u = 0$ et $u' = 0$, car les équations $u = 0$ et $\frac{du}{dc} = 0$, $u = 0$ et $u' = 0$ ont lieu en même temps, d'après ce qui a été dit ci-dessus. On appelle communément l'équation primitive $v = 0$ la *solution particulière* de la primitive $u = 0$ et de l'équation différentielle $u_{,} = 0$, puisqu'elle s'accorde entièrement avec l'équation différentielle $u_{,} = 0$, sans être identique avec la primitive $u = 0$, c'est-à-dire qu'elle satisfait bien à l'équation différentielle $u_{,} = 0$, sans être cependant son intégrale.

Exemple. Soit la primitive

$$y - cx - n(1 + c^2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

On a ici

$$y - cx - n(1 + c^2)^{\frac{1}{2}} = u = 0,$$

$$dy - cdx = u' = 0, \quad y - px - n(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = u_{,} = 0,$$

$$\frac{du}{dc} = -x - \frac{nc}{(1 + c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On tire de $\frac{du}{dc} = 0$,

$$c = \frac{-x}{(n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

[on ne pourra prendre le radical, dans cette valeur de c, que du signe négatif, ce qui se voit quand on remet c en $\frac{du}{dc} = 0$ (*voyez* n° 89, (1), forme première)]; en mettant cette valeur de c dans l'équation $u = 0$, on obtient

$$v = y + \frac{x^2 - n^2}{(n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = y - (n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

En différenciant cette équation, on trouve

$$p + \frac{x}{(n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0;$$

et substituant cette valeur de p dans l'équation $u_{,} = 0$, on obtient

$$y - (n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

équation qui est identique avec l'équation $v = 0$. Donc, l'équation $y - (n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 0$, ou $v = 0$, satisfaisant à

l'équation différentielle $u_{,} = 0$, est la solution particulière de $u = 0$ et de $u_{,} = 0$.

L'intégrale du n° 89 [(1), forme première, exemple] est l'équation primitive ici considérée $u = 0$, ainsi que l'équation différentielle proposée au numéro cité est l'équation $u_{,} = 0$. Par l'élimination de p entre $x + \frac{dP}{dp} = 0$ et l'équation différentielle proposée, nous avons obtenu, au numéro cité, la même équation, savoir $v = 0$, que nous venons d'obtenir ici par l'élimination de c entre $u = 0$ et $\frac{du}{dc} = 0$.

Dans toute équation différentielle de la forme

$$y = px + P,$$

la solution particulière se pourra trouver par le facteur $x + \frac{dP}{dp} = 0$, comme cela a été tout généralement prouvé au n° 89.

Nous allons considérer maintenant les courbes correspondantes aux équations $u = 0$ et $v = 0$.

L'équation $u_{,} = 0$, qui résulte de $u = 0$ et de $u' = 0$, est satisfaite par l'équation $v = 0$ et par sa différentielle. Il suit de là que les valeurs de $p = \frac{dy}{dx}$, tirées des deux équations $u = 0$ et $v = 0$ sont nécessairement égales entre elles pour la même valeur de x. Il en résulte, d'après le n° 45, que les deux courbes, dont les équations sont $u = 0$ et $v = 0$, auront aussi la même tangente pour la même valeur de x. Or, la valeur de p tirée de $v = 0$ satisfait à la valeur de p tirée de $u = 0$, pour chaque valeur de c, parce que cette lettre n'entre point dans l'équation $v = 0$. Donc, les courbes $u = 0$ et $v = 0$ ont pour chaque valeur de c, suivant laquelle se changera aussi la courbe

$u = 0$, la même tangente, c'est-à-dire que toutes les courbes engendrées par le changement du paramètre c, ont un point de commun avec la courbe $v = 0$, et la même tangente à ce point.

On en tire ces deux conséquences : Premièrement, on peut s'imaginer que toutes les courbes contenues dans l'équation $u = 0$ forment, par leurs intersections, la courbe dont l'équation est $v = 0$. C'est par cette raison que la courbe dont l'équation est $v = 0$ s'appelle la *courbe limite*, ou la *courbe enveloppante*; les courbes, au contraire, contenues dans l'équation $u = 0$, s'appellent les *courbes enveloppées*.

Secondement, si $u = 0$ représente l'équation de la ligne droite, les lignes droites formées par la variation du paramètre seront elles-mêmes tangentes à la courbe correspondante qui a pour équation $v = 0$; ou bien, l'équation d'une courbe est la solution particulière de l'équation de sa tangente; donc, toute courbe est la courbe enveloppante de sa tangente.

Dans l'exemple considéré ci-dessus, l'équation $u = 0$ appartient à une ligne droite, et l'équation $v = 0$ à un cercle. Ce cercle sera donc, dans chaque point, touché de l'une des droites qui résultent de $u = 0$ par la variation de c, ou le cercle a chacune de ces droites pour tangente, ou les lignes droites forment, par leurs intersections, le cercle.

Dans une équation primitive proposée, contenant, outre x et y, encore c et $\varphi(c)$, on peut aussi déterminer la fonction indéterminée $\varphi(c)$, de manière que l'équation primitive appartienne à une équation particulière donnée, savoir : l'équation primitive et la solution particulière ayant pour la même valeur de x et y le même p, on n'aura qu'à égaler les valeurs qu'on tire de ces équations pour y et p. Les deux équations obtenues par là, après en avoir chassé x, conduiront à la détermination de $\varphi(c)$.

Soient données, pour exemple, l'équation primitive

$$u = 0 = y - cx - \varphi(c),$$

et la solution particulière

$$y^2 + x^2 = n^2.$$

On a

$$y = cx + \varphi(c) = (n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$p = c = \frac{-x}{(n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

de la seconde équation on tire

$$x = \frac{-nc}{(1 + c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

(*voy* l'exemple considéré au commencement de ce numéro); substituant dans la première, on trouve

$$\varphi(c) = n(1 + c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La ligne droite, qui a pour solution particulière l'équation du cercle $y^2 + x^2 = n^2$, aura donc pour équation

$$y - cx - n(1 + c^2)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

la même que nous avons trouvée ci-dessus.

On voit clairement qu'une solution particulière proposée appartient à un nombre infini d'équations primitives $u = 0$, ou que l'équation $v = 0$ résulte d'un nombre infini de systèmes de $u = 0$ et de $\frac{du}{dc} = 0$, par l'élimination de c.

Soit regardée maintenant, pour exemple, l'équation du cercle $y^2 + x^2 = n^2$, comme la solution particulière pro-

posée (par laquelle nous venons de déterminer l'équation de la ligne droite, comme la primitive correspondante $u = 0$). On se propose de déterminer la primitive correspondante

$$u = 0 = y^2 - cx - \varphi(c).$$

On a, d'après les règles précédentes,

$$y = (n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = [cx + \varphi(c)]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$p = \frac{-x}{(n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{c}{2[cx + \varphi(c)]^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

$$n^2 - x^2 = cx + \varphi(c)$$

et

$$\frac{x^2}{n^2 - x^2} = \frac{c^2}{4[cx + \varphi(c)]}, \quad \text{ou} \quad n^2 - x^2 = cx + \varphi(c)$$

et

$$x^2 = \frac{c^2}{4};$$

de la seconde équation on tire $x = \pm \frac{c}{2}$; substituée dans la première, il vient

$$n^2 - \frac{c^2}{4} = \pm \frac{c^2}{2} + \varphi(c);$$

d'où

$$\varphi(c) = n^2 - \frac{c^2}{4} \mp \frac{c^2}{2}.$$

On a donc

$$u = 0 = y^2 - cx - n^2 + \frac{c^2}{4} \pm \frac{c^2}{2}.$$

Si l'on en cherche, d'après le procédé exposé au commencement de ce numéro, la solution particulière, on voit qu'il faut prendre le signe négatif. La primitive cherchée, ayant pour solution particulière l'équation du cercle proposée, sera donc

$$y^2 = cx + n^2 + \frac{c^2}{4}.$$

D'après cela, une valeur déterminée de x, pour laquelle l'équation primitive $u = 0$ donne la valeur correspondante de y, indique dans les courbes enveloppées un point qui est commun à deux courbes enveloppées consécutives l'une à l'autre.

L'équation $u_{,} = 0$, qui appartient à toutes ces courbes enveloppées, ne peut indiquer la différence de ces courbes que par la valeur de $p = \frac{dy}{dx}$ pour le même point, parce que c n'entre plus dans l'équation; ou les différentes courbes enveloppées, dont l'équation différentielle est $u_{,} = 0$, ne peuvent être différentes entre elles dans un point, savoir, pour la même valeur de x et de y, que par rapport à p. Donc, pour trouver l'équation de la courbe qui joint tous ces points, c'est-à-dire pour trouver la courbe enveloppante, on n'aura qu'à différencier l'équation $u_{,} = 0$ par rapport à p, et éliminer p entre $u_{,} = 0$ et $\frac{du_{,}}{dp} = 0$, procédé tout-à-fait égal à celui par lequel on a déduit ci-dessus l'équation de l'enveloppante $v = 0$ de l'équation de la courbe enveloppée $u = 0$.

Nous appliquerons sur-le-champ cette méthode pour trouver la solution particulière d'une équation différentielle $u_{,} = 0$ à l'exemple suivant.

Soit $u = 0 = 2xyp + n^2 - y^2 + y^2p^2$.

On a

$$\frac{du}{dp} = 2xy + 2y^2p.$$

De $\frac{du}{dp} = 0$, on tire $p = \frac{-x}{y}$. Substituée dans $u = 0$, on obtient, pour la solution particulière cherchée,

$$y^2 + x^2 = n^2,$$

l'équation d'un cercle.

Le lecteur s'exercera encore sur les problèmes suivans.

Problème 1. On propose de trouver les solutions particulières des équations primitives suivantes :

$$y - cx = (b^2 + a^2c^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$y = cx + a\,[(1 + c^2)^{\frac{1}{2}} - c],$$
$$x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = 0.$$

Problème 2. On propose de déterminer, pour la solution particulière

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

la fonction $\varphi(c)$ dans l'équation primitive

$$x^2 - 2cy + \varphi(c) = 0.$$

Le lecteur fera bien de construire pour ces problèmes, comme pour les suivans, les figures correspondantes.

Problème 3. Soit à trouver la solution particulière de l'équation différentielle

$$x^2 + 2xyp + (n^2 - x^2)p^2 = 0.$$

Problème 4. Soit donnée la solution particulière

$$y^2 = ax.$$

On se propose de trouver l'équation primitive correspondante de la forme

$$y = cx + \varphi(c) \quad \text{et de la forme} \quad y^2 = cx^2 + \varphi(c).$$

Nous rapporterons encore quelques problèmes où la fonction $\varphi(c)$ dans l'équation de la ligne droite

$$y = -cx + \varphi(c)$$

doit être déterminée par des conditions données, pour trouver la courbe de la solution particulière.

Problème 5. Une droite donnée DE (fig. 7) d'une longueur donnée $= m$ se meut en sorte que l'une et l'autre de ses deux extrémités D et E se trouvent toujours sur les côtés de l'angle droit A. On cherche la courbe engendrée par la droite pendant son mouvement.

Soit A l'origine des coordonnées qu'on comptera sur AD et AE.

L'équation de la droite est $y = -cx + b$ (n° 47). Or, d'après la condition du problème, l'ordonnée à l'origine des coordonnées, savoir b, est $= \text{AD} = m.\sin\text{E} = \dfrac{mc}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}}$.

L'équation de la ligne droite devient par là

$$y = -cx + \frac{mc}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}};$$

la solution particulière en est

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}}.$$

On construira la courbe, et en décrivant des quatre coins d'un quarré, dont le côté soit $= 2m$, comme centres, des cercles d'un rayon $= m$, on comparera avec elle l'aire interceptée entre ces quatre cercles.

On propose de trouver la solution particulière, si l'angle au dedans duquel se meut la droite est un angle aigu d'une grandeur donnée.

Problème 6. Qu'une ligne droite DE (fig. 7) se meuve de sorte que la somme de ses distances à l'origine des coordonnées A, comptées sur les axes des x et des y, savoir, AD + AE, soit égale à une quantité donnée h.

Faisant AD $= c$ et AE $= m$, l'équation de la droite sera

$$y = -\frac{c}{m}x + c.$$

Or, on a, d'après la condition, $c + m = h$, ou $m = h - c$. L'équation devient par là

$$y = \frac{-cx}{h-c} + c,$$

ou en faisant $\frac{-c}{h-c} = c'$,

$$y = c'x + \frac{hc'}{c'-1};$$

la solution particulière en est

$$(y-x)^2 - 2h(x+y) + h^2 = 0,$$

équation d'une parabole.

Si la condition était ici $m.c = a^2$, ou $m^2 = ac$?

Problème 7. On propose de trouver la courbe dont les tangentes coupent, de la parabole $y'^2 = ax'$, l'aire constante $= m^2$. Il suit du n° 73, exemple IV, qu'une corde KL (fig. 9) qui rencontre l'axe de la parabole sous un angle dont la tangente trigonométrique est $= c$, et dont la distance au sommet est $= z$, coupe l'aire.....

$$= \frac{4a^{\frac{1}{2}}}{3}\left(z + \frac{a}{4c^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On a, d'après cela,

$$\frac{4a^{\frac{1}{2}}}{3}\left(z+\frac{a}{4c^2}\right)^{\frac{3}{2}}=m^2;$$

d'où l'on tire, en faisant $\left(\frac{3m^2}{4a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}=h$,

$$z=h-\frac{a}{4c^2}.$$

Étant d'ailleurs $AY=cz$, l'équation de la droite KL est

$$y=c(x-h)+\frac{a}{4c};$$

la solution particulière donne

$$y^2=a(x-h),$$

équation d'une parabole.

Le lecteur prouvera aisément, à l'aide du n° 73, que le milieu de KL est en même temps le point de contact.

On propose, de plus, de déterminer la courbe dont les tangentes coupent, de la section du cône en général, l'aire $=m^2$.

91. D'après le n° 51, l'équation de la normale d'une courbe proposée est

$$\beta-y'=-\frac{1}{p'}(\alpha-x')\ldots\ (a),$$

α, β représentent les coordonnées de la normale, x', y', celles du point de la courbe, par lequel passe la normale. Si l'on différencie cette équation en y regardant x'

seul comme variable, on trouve, en mettant $\frac{dp'}{dx'} = q'$,

$$-p' = \frac{q'}{p'^2}(\alpha - x') + \frac{1}{p'} \ldots\ldots (b).$$

On obtient, d'après le numéro précédent, la solution particulière de la normale par l'élimination de x' entre les deux équations (a) et (b).

Substituant la valeur de $\alpha - x'$, tirée de (b), en (a), on obtient, au lieu des équations (a) et (b), les deux suivantes :

$$y' - \beta = \frac{-(1 + p'^2)}{q'} \ldots\ldots (c)$$

et

$$x' - \alpha = \frac{p'(1 + p'^2)}{q'} \ldots\ldots (d),$$

les mêmes qu'on a trouvées au n° 52, et desquelles résulte, comme il a été montré au numéro cité, l'équation de la courbe des centres par l'élimination de x'. On voit donc par là que la courbe des centres d'une courbe proposée est la courbe enveloppante de la normale de cette courbe, et que cette normale y est tangente. (*Voy.* n° 90.)

En différenciant maintenant successivement les équations (c) et (d), divisant ensuite par dx', et faisant $\frac{dy'}{dx'} = p'$, $\frac{dp'}{dx'} = q'$, $\frac{dq'}{dx'} = r'$, on obtient

$$\frac{d\alpha}{dx'} = \frac{p'r'(1 + p'^2) - 3p'^2q'^2}{q'^2},$$

$$\frac{d\beta}{dx'} = \frac{3p'q'^2 - r'(1 + p'^2)}{q'^2}.$$

Soit s l'arc de la courbe des centres; on a ainsi

$$ds = (d\alpha^2 + d\beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{n}^\circ\ 26),$$

ou en divisant par dx',

$$\frac{ds}{dx'} = \left(\frac{d\alpha^2}{dx'^2} + \frac{d\beta^2}{dx'^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou, en y substituant les expressions que nous venons de développer,

$$\frac{ds}{dx'} = \frac{(1 + p'^2)^{\frac{3}{2}} \cdot [3p'q'^2 - r'(1 + p'^2)]}{q'^2}.$$

Mais on parvient au même résultat, en différenciant l'expression du rayon de courbure

$$r = \frac{\pm (1 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}{q'} \text{ (n° 51)},$$

et divisant par dx', en sorte qu'on a

$$\frac{ds}{dx'} = \frac{dr}{dx'}, \quad \text{ou} \quad ds = dr;$$

d'où

$$s = r + c.$$

Il en résulte que pour deux valeurs différentes de x', les différences des rayons de courbure correspondans sont égales aux arcs correspondans de la courbe des centres; en sorte que si l'on désigne par $r_{,}$ et $r_{,,}$ les rayons de courbure correspondans à $x'_{,}$ et $x'_{,,}$, et par $s_{,}$ et $s_{,,}$ les arcs correspondans des courbes des centres, on aura toujours

$$r_{,,} - r_{,} = s_{,,} - s_{,}.$$

On voit par là, et par ce qui précède, que l'arc de la courbe des centres se pourra développer sur le rayon de courbure, en mettant un fil autour de la courbe des centres, lequel formera toujours, pendant le développe-

ment, la tangente de la courbe. On appelle pour cela la courbe des centres, aussi la *courbe développée*, et la courbe proposée qui se décrit par l'un des bouts du fil pendant le développement, la *courbe développante*.

Il en résulte, de plus, que l'arc de la courbe développée se pourra exprimer algébriquement, ou, comme on dit aussi, qu'il est *rectifiable* (*voyez* n° 75), si l'équation de la développante est algébrique, parce qu'alors la longueur de son rayon de courbure, qui est égal à l'arc de la courbe développée, s'exprime de même algébriquement (n° 51). Ainsi, par exemple, la développée de la parabole ordinaire, laquelle nous avons trouvée n° 52, est rectifiable.

92. Pour exercer le lecteur, appliquons, dans ce numéro et le suivant, à deux problèmes, la méthode exposée pour trouver la courbe enveloppante d'une droite donnée.

Soient menées d'abord de chaque point M (fig. 19) d'une courbe donnée, dont les coordonnées soient x' et y', des lignes droites OM à un point fixe O, dont les coordonnées soient α et β; soient menées ensuite des lignes droites MS, avec lesquelles les normales correspondantes MR enferment le même angle qu'avec les droites OM. On se propose de trouver la courbe Cc formée par les lignes MS, laquelle s'appelle la *caustique*, parce que, d'après la nature de la lumière, les rayons tombant d'un point luisant O sur une courbe, sont réfléchis de manière que la normale du point d'incidence forme, avec les rayons incidens et réfléchis, le même angle.

Désignons par x' et y' les coordonnées de la courbe donnée sur laquelle se trouve le point M, et par x, y les coordonnées de la droite MS et de la courbe Cc.

On a ainsi pour équation de la ligne OM (n° 47),

$$y - y' = \left(\frac{\beta - y'}{\alpha - x'}\right).(x - x'),$$

d'où la tangente trigonométrique de l'angle entre la ligne OM et l'axe des abscisses $= \frac{\beta - y'}{\alpha - x'} = h$; de là la tangente trigonométrique de l'angle entre OM et la normale MR,

$$= \frac{1 + p'h}{h - p'} = h',$$

où $p' = \frac{dy'}{dx'}$; de là enfin, la tangente trigonométrique de l'angle entre MS et l'axe des abscisses $= \frac{1 - h'p'}{p' + h'}$. Donc, la ligne MS aura pour équation

$$y - y' = \left(\frac{h'p - 1}{p' + h'}\right).(x - x').$$

En différenciant cette équation par rapport à x', et mettant $\frac{dp'}{dx'} = q'$, on tire de ces deux équations les deux expressions

$$x = x' + \frac{(p' + h')(1 + p'^2)}{q'(1 + h'^2) + \frac{dh'}{dx'}(1 + p'^2)},$$

$$y = y' + \frac{(1 - h'p')(1 + p'^2)}{q'(1 + h'^2) + \frac{dh'}{dx'}(1 + p'^2)}.$$

Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivans:

Exemple I. Soit la courbe proposée une ellipse dont l'équation est rapportée au centre et à ses axes, et dont l'excentricité est $= c$.

Soit l'un des foyers le point luisant. On a donc

$$\beta = 0, \quad \alpha = -c, \quad h = \frac{y'}{c + x'}, \quad \text{etc.}$$

On trouve enfin

$$y = 0, \qquad x = c.$$

Les rayons seront, par conséquent, réfléchis de l'un des foyers à l'autre.

Exemple II. Soit la courbe réfléchissante un cercle dont l'équation

$$y'^2 = 2rx' - x'^2,$$

soit le point luisant à l'extrémité du diamètre. On a ici

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0.$$

On obtient, en chassant x' des deux expressions données ci-dessus pour x et y, l'équation de la cardioïde, que nous avons considérée n°s 56 et 75.

Supposons maintenant que les rayons soient parallèles entre eux, et qu'ils rencontrent perpendiculairement l'axe des abscisses; on a alors, comme on voit aisément, $h' = p'$. Les expressions ci-dessus, de x et de y, se changent en

$$x = x' - \frac{p'}{q'}, \qquad y = y' + \frac{1 - p'^2}{2q'}.$$

On en tire

$$\frac{dx}{dx'} = \frac{p'r'}{q'^2}, \quad \frac{dy}{dx'} = \frac{r'(p'^2 - 1)}{2q'^2}, \left(\text{où } r' = \frac{dq'}{dx'}\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{p'^2 - 1}{2p'}.$$

On a donc, en représentant par s l'arc de la caustique,

$$ds = dx(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (n° 26)} = \frac{r'(1 + p'^2)}{2q'^2}\, dx';$$

mais on a (fig. 19),

$$MS = [(y - y')^2 + (x - x')^2]^{\frac{1}{2}},$$

ou, en mettant pour y et x les valeurs ci-dessus trouvées,

$$= \frac{-(1+p'^2)}{2q'},$$

[prenant ici, à cause de q', le signe négatif (*voy.* n° 49)], et

$$\mathrm{MS} + \mathrm{MP} = y' - \frac{(1+p'^2)}{2q'};$$

de là

$$\mathrm{d}(\mathrm{MS} + \mathrm{MP}) = \frac{r'(1+p'^2)\mathrm{d}x}{2q'^2}.$$

On a, par conséquent,

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}(\mathrm{MS} + \mathrm{MP});$$

d'où

$$s = \mathrm{MS} + \mathrm{MP} + \mathrm{C}.$$

Soient s'', MS'', MP'', aussi bien que s', MS', MP', des quantités correspondantes; on a ainsi

$$s'' - s' = \mathrm{MS}'' - \mathrm{MS}' + \mathrm{MP}'' - \mathrm{MP}';$$

c'est-à-dire que la différence de deux arcs de la caustique pour des rayons parallèles, est égale à la somme des différences des ordonnées correspondantes MP et des tangentes MS.

Si l'on élève en S sur MS une perpendiculaire SQ jusqu'à la normale, MQ sera, comme le lecteur prouvera aisément, égale à la moitié du rayon de courbure au point M.

Quelles seront les valeurs de x et de y, lorsque les rayons parallèles tombent perpendiculairement sur l'axe des ordonnées?

Exemple III. Soit la courbe réfléchissante une parabole ordinaire, et soient les rayons d'incidence parallèles entre eux et en même temps parallèles à l'axe de la parabole. Quelle est la caustique?

Si les rayons parallèles tombent perpendiculairement sur l'axe de la parabole, la caustique a pour équation

$$y^2 = \frac{ax}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{2x}{3a}\right)^2.$$

Exemple IV. Soit la courbe réfléchissante un cercle dont l'équation est

$$y'^2 = r^2 - x'^2,$$

les rayons tombant perpendiculairement sur l'axe des x.

L'équation cherchée de la caustique est

$$(4y^2 + 4x^2 - r^2)^3 = 27r^4x^2.$$

Dans la figure 15, OH est $= r$, et HR la caustique.

L'arc HR est $= \frac{3r}{2}$, comme on voit par la proposition prouvée généralement ci-dessus, que

$$s = \text{PM} + \text{MS} + \text{C}.$$

On trouve le même résultat en développant p', q', r', de l'équation donnée du cercle, et en intégrant l'expression ci-dessus donnée pour ds, depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = r$.

L'aire HSROH est $= \frac{3r^2\pi}{16}$, comme on trouvera de la même manière par l'intégration de $y dx$.

Exemple V. Soit la courbe réfléchissante une cycloïde, les rayons tombant perpendiculairement sur la base. La caustique est encore une cycloïde dont la base est la moitié de celle de la courbe réfléchissante.

Supposons maintenant que les rayons d'incidence passent par la courbe, mais qu'ils soient déclinés, en sorte que le sinus de l'angle entre le rayon d'incidence et la tangente à la courbe, dans le point d'incidence, soit au sinus de l'angle entre le rayon détourné et la tangente comme $1 : n$.

On propose de trouver la courbe formée par les rayons déclinés, laquelle porte le nom de *caustique par réfraction* (*diacaustica*).

En supposant, comme précédemment, $\frac{\beta - y'}{\alpha - x'} = h$; de plus,

$$\frac{hp' + 1}{p' - h} = h' \quad \text{et} \quad [1 + h'^2(1 - n^2)]^{\frac{1}{2}} = h'',$$

on obtient pour l'équation du rayon décliné, comme le lecteur trouvera sans difficulté,

$$y - y' = \left(\frac{np'h' - h''}{p'h'' + nh'}\right)(x - x'),$$

et, de plus,

$$x = x' - \frac{h''(1 + p'^2)(p'h'' + nh')}{\frac{n}{h''} \cdot \frac{dh'}{dx'}(1 + p'^2) + q'(1 + h'^2)},$$

$$y = y' + \frac{h''(1 + p'^2)(h'' - np'h')}{\frac{n}{h''} \cdot \frac{dh'}{dx'}(1 + p'^2) + q'(1 + h'^2)}.$$

Quelles seront les expressions de x et y, lorsque les rayons parallèles entre eux tombent perpendiculairement ou sur l'axe des abscisses, ou sur celui des ordonnées?

93. Qu'on s'imagine maintenant que le centre d'un cercle se meuve sur une courbe dont l'équation $y' = f(x')$ soit donnée, mais de manière que, conformément à la variation du centre, la longueur du rayon r varie, et qu'on ait par conséquent $r = \varphi(x')$. Dans l'équation du cercle

$$(y - y')^2 + (x - x')^2 - r^2 = 0 \ldots\ldots (a),$$

y' sera donc, aussi bien que r, en fonction de x'.

En différenciant cette équation par rapport à x', il vient

$$(y-y')\frac{dy'}{dx'}+(x-x')+r\frac{dr}{dx'}=0 \ldots (b).$$

L'élimination de x' entre les deux équations (a) et (b) conduit à une équation entre x et y, qui, d'après le n° 90, sera la solution particulière de l'équation proposée du cercle, et qui appartient à une courbe formée par les intersections des cercles différens.

Soit, pour exposer cela sous un point de vue tout général et en même temps géométriquement (fig. 20), PC une courbe immobile et exprimée par les coordonnées x' et y'. Que l'on roule sur sa circonférence une autre courbe MQC, où se trouve un point donné M. Qu'on mène du point C, commun à l'une et à l'autre de ces deux courbes, une corde $CM=r$, au point M, et qu'on décrive de C, comme centre, un cercle avec le rayon $=r$. On demande la courbe qui, comme il a été dit ci-dessus, joint tous les points d'intersection de ces cercles coupant les uns les autres. Cette courbe s'appelle *roulette*, à cause de son engendrement.

On voit d'ailleurs aisément que la corde $MC=r$ de la courbe mobile, se peut exprimer, moyennant son équation, par l'arc MQC; or, l'arc MQC est égal à l'arc PC, si l'on suppose que le point M soit en P au commencement du mouvement; donc, r est aussi exprimé par l'arc de la courbe immobile; donc aussi, par les coordonnées de cette courbe, c'est-à-dire par x' et y', comme il a été déjà dit plus haut.

Rapportons encore, pour faciliter le calcul, les valeurs de x et de y, tirées des équations (a) et (b). Les voici :

$$x=x'-\frac{[rdrdx'+rdy'(dr^2-dr^2)^{\frac{1}{2}}]}{dr^2},$$

$$y = y' - \frac{[r\,dr\,dy' - r\,dx'(dt^2 - dr^2)^{\frac{1}{2}}]}{dt^2},$$

où $dt^2 = dx'^2 + dy'^2$, t désignant l'arc de la courbe immobile.

Les exemples suivans, auxquels on n'ajoutera que quelques remarques pour faciliter le calcul, serviront à l'exercice du lecteur.

Exemple I. Supposons que la courbe immobile soit une ligne droite, étant en même temps l'axe des abscisses, et que la courbe mobile soit un cercle dont le rayon $= a$. On a

$$y' = 0, \quad dy' = 0, \quad x' = t, \quad r = \left[2a^2\left(1 - \cos\frac{t}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Les expressions de x et de y font voir que la roulette cherchée est une cycloïde, à ce qu'on devait s'attendre, à cause de son engendrement. (*Comparez* n° 54, problème 7.)

Si nous ne supposons pas que le point décrivant se trouve sur la circonférence du cercle, mais éloigné du centre de la quantité m, on obtient

$$r = \left(m^2 - 2ma.\cos\frac{t}{a} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = t - m.\sin\frac{t}{a},$$

$$y = a - m.\cos\frac{t}{a}.$$

La courbe s'appelle *cycloïde allongée* ou *accourcie*, selon que m est plus petite ou plus grande que a.

Exemple II. Supposons que les courbes, tant la mobile que l'immobile, soient des cercles, la première, du rayon b, la dernière, du rayon a. Supposons, de plus, que l'axe des abscisses passe par le centre du cercle immobile, et concevons, pour plus de généralité, que la dis-

tance du point décrivant au centre du cercle mobile soit $= m$.

Cela posé, on a

$$x' = b - b.\cos\frac{t}{b}, \quad y' = b.\sin\frac{t}{b},$$

$$r = \left(m^2 - 2ma.\cos\frac{t}{a} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient par là, pour la courbe cherchée qui s'appelle *épicycloïde*, les expressions suivantes :

$$x = b - (b + a)\cos\frac{t}{b} + m.\cos\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)t,$$

$$y = (b + a)\sin\frac{t}{b} - m.\sin\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)t.$$

Si $m = a = b$, l'épicycloïde devient la *cardioïde* considérée aux n°s 56, 75 et 92.

Si $m = a$ et $a = \frac{b}{2}$, l'épicycloïde devient la caustique du cercle pour des rayons parallèles. (*Voyez* n° 92, exemple IV.)

Exemple III. Supposons qu'il se meuve sur une courbe une ligne droite, de manière que sa longueur soit toujours égale à l'arc parcouru ou développé de la courbe immobile, la courbe cherchée sera la développante.

On a ici $r = t$, et l'on trouve

$$x = x' - t.\frac{dx'}{dt}, \quad y = y' - t.\frac{dy'}{dt}.$$

Le lecteur cherchera, d'après cela, la développante de la parabole qui a pour équation $y'^2 = \frac{16}{27m}x'^3$; il trouvera pour résultat la parabole ordinaire (n° 52). On pro-

pose le même problème pour la cycloïde, qu'on trouvera égale et semblable à sa développante (fig. 12).

94. Nous avons vu, dans le n° 90, que l'équation primitive $v = 0$, déduite des équations $u = 0$ et $\frac{du}{dc} = 0$, et la primitive $u = 0$, ont la même valeur de p pour les mêmes valeurs de x et de y. Désignons, comme au n° 90, la différentielle immédiate de $u = 0$ par $u' = 0$, et la différentielle de $u' = 0$, en ne faisant varier que c, par $\frac{du'}{dc} dc = 0$. L'équation différentielle formée par l'élimination de c entre les équations $u' = 0$ et $\frac{du'}{dc} = 0$, aura donc, d'après ce que nous venons de dire, avec l'équation $u' = 0$ la même valeur de q, pour les mêmes valeurs de p, x et y. La courbe qui répond à l'intégrale de cette équation différentielle aura, par conséquent, avec chacune des courbes qui résultent de $u = 0$, par la variation de c, non-seulement la même tangente ou un contact du premier ordre, mais aussi un contact du second ordre. (*Voyez* n° 50).

Soit donnée, pour exemple, l'équation du cercle

$$(y - y')^2 + (x - x')^2 = r^2.$$

Supposons ici que, conformément à la variation du centre, dont les coordonnées soient x' et y', varie la longueur du rayon r. Dans cette supposition, x', aussi bien que y', étant des fonctions de r, savoir : $x' = \varphi(r)$ et $y' = f(r)$, on aura

$$[y - f(r)]^2 + [x - \varphi(r)]^2 = r^2 \ldots\ldots (a);$$

en différenciant par rapport à x et à y, il vient

$$p[y - f(r)] + x - \varphi(r) = 0 \ldots\ldots (b).$$

Cette dernière équation, différenciée par rapport à r,

donne

$$f'(r)p + \varphi'(r) = 0 \ldots\ldots (e),$$

où

$$f'(r) = \frac{d.f(r)}{dr} \quad \text{et} \quad \varphi'(r) = \frac{d.\varphi(r)}{dr}.$$

En chassant r des équations (b) et (c), on parvient à une équation différentielle dont l'intégrale a à la fois un contact du premier et du second ordre avec le cercle proposé. Supposant encore qu'avec l'équation entre x' et y', qui appartient à la courbe des centres du cercle, ait en même temps lieu l'équation

$$r = \int dx' \left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

et déterminant par là $x' = \varphi(r)$ et $y' = f(r)$, il est visible que la courbe correspondante à l'intégrale trouvée sera la développante qui a pour développée la courbe des centres, et r pour le rayon de courbure.

Nous allons appliquer sur-le-champ aux deux exemples suivans cette méthode, pour déduire la développée de la développante.

Exemple I. Soit $\quad y'^2 = \frac{16x'^3}{27a}$;

de là

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{2x'^{\frac{1}{2}}}{(3a)^{\frac{1}{2}}}, \quad 1 + \frac{y'^2}{dx'^2} = \frac{3a + 4x'}{3a},$$

$$\int dx' \left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{1}{2}} = r = \frac{(3a + 4x')^{\frac{3}{2}}}{6(3a)^{\frac{1}{2}}} + c;$$

d'où

$$x' = \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{4}\left[2^{\frac{2}{3}}(r-c)^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right] = \varphi(r),$$

et

$$y' = \frac{1}{2}\left[2^{\frac{2}{3}}(r-c)^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} = f(r);$$

on en tire, de plus,

$$\varphi'(r) = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}(r-c)^{-\frac{1}{3}}$$

et

$$f'(r) = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}(r-c)^{-\frac{1}{3}}\left[2^{\frac{2}{3}}(r-c)^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En développant maintenant les équations (b) et (c), on tire de (c)

$$2^{\frac{2}{3}}(r-c)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{1}{p^2}\right);$$

substituée dans l'équation (b), il vient [en prenant $y' = f(r)$ du signe négatif],

$$yp + x - \frac{a}{4p^2} = 0.$$

On parvient à l'intégrale, comme il a été exposé n° 89, 1, forme 2, en éliminant p entre les équations

$$yp + x - \frac{a}{4p^2} = 0 \ldots\ldots (d)$$

et

$$x - \frac{a}{4p^2} + \frac{a}{2} - \frac{cp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \ldots\ldots (e).$$

Cette intégrale complète renferme un nombre infini de développantes, qui ont toutes la courbe dont l'équation est $y'^2 = \frac{16x'^3}{27a}$ pour développée; mais si l'on assigne une valeur déterminée à la constante c, cette intégrale, qu'on nomme aussi l'*intégrale particulière*, pour la distinguer de l'intégrale générale, appartient à une développée particulière. En faisant $c = 0$, par exemple, on obtient pour l'intégrale particulière

$$y^2 = a\left(x + \frac{a}{2}\right),$$

l'équation de la parabole ordinaire, dont nous avons déjà montré, au n° 52, que l'équation proposée est la développée.

Pour reconnaître de plus près la nature de la constante c, et en même temps la position respective des différentes développantes, mettons $z = y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$; on obtiendra ainsi, en chassant p des équations (d) et (e), l'équation primitive

$$(z^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}(z + c) = \frac{az}{2},$$

où l'ordonnée y et la normale z représentent les coordonnées; on en tire

$$(z^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} : \frac{a}{2} = z : (z + c).$$

Soit (fig. 9) pour une valeur donnée de c, la développante VR; on aura donc RS $= y$ et RT $= z$; soit, de plus, AM la parabole ordinaire, qui est aussi du nombre des développantes, comme nous avons vu plus haut. En prolongeant la normale TR jusqu'en M, et menant MP,

on a, comme on sait, $PT = \frac{a}{2}$, et l'on voit par la proportion précédente que la portion MR de la normale est $= c$. Il s'ensuit que dans le sens de la normale ou dans celui du rayon de courbure, toutes les développantes sont également éloignées les unes des autres, ou qu'elles sont parallèles entre elles; il s'ensuit de même que toutes les développantes s'engendrent par le développement de la développée DF (*voyez* n° 91), en ajoutant au fil, au commencement du développement, une quantité plus considérable ou moindre. Cela s'accorde tout-à-fait avec la proposition prouvée ci-dessus n° 91, que $r = s + c$.

Exemple II. Soit proposé de trouver la développante du cercle qui a pour équation $y'^2 = a^2 - x'^2$.

On a ici

$$r = a.\text{arc}\left(\sin = \frac{x'}{a}\right);$$

d'où

$$x' = a.\sin\frac{r}{a} = \varphi(r), \quad y' = a.\cos\frac{r}{a} = f(r).$$

Les équations (b) et (c) sont, d'après cela,

$$\left(y - a.\cos\frac{r}{a}\right)p + x - a.\sin\frac{r}{a} = 0 \text{ et } \cos\frac{a}{r} = p.\sin\frac{r}{a}.$$

On en déduit, en chassant

$$\sin\frac{r}{a} \text{ et } \cos\frac{r}{a} = \left[1 - \left(\sin\frac{r}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

l'équation suivante

$$x + py = a(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale se forme par l'élimination de p entre la der-

nière équation et celle qui suit

$$y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = ap - a.\text{arc}(\text{tang} = p) + ac. \text{ (Voy. n° 89, II.)}$$

En faisant arc (tang $= p$) $= t$, d'où $p = \text{tang}\, t$, $\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos t$, $\frac{p}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin t$, on tire de la dernière équation

$$y = a.\sin t - a(t-c).\cos t,$$

et par la substitution dans la première, on trouve

$$x = a.\cos t + a(t-c)\sin t.$$

D'ailleurs, on peut obtenir les valeurs de x et de y immédiatement par la considération de la figure appartenante (fig. 5). Nous laissons cela au lecteur, ainsi que la rectification et la quadrature de la courbe, à l'aide des valeurs de

$$dx = a(t-c)\cos t.dt \text{ et } dy = a(t-c)\sin t.dt. \text{ (V. n° 69.)}$$

95. Voici encore quelques problèmes par lesquels le lecteur s'exercera sur l'intégration des équations différentielles implicites à deux variables, du premier ordre, en construisant les courbes appartenantes.

Problème 1. Trouver la courbe où la sous-tangente est constante. On a ici (46) $yp = a$.

Trouver la courbe où la sous-normale est une fonction de x, par exemple, $= X$. On a ici $yp = X$, ou $ydy = Xdx$, d'où $\frac{y^2}{2} = \int Xdx + c$. Le lecteur se donnera lui-même des valeurs particulières de X.

Trouver la courbe où la sous-tangente est constante. On a ici $y = ap$ (46); de là $dx = \frac{ady}{y}$, ou $a.\log y = x + c$,

ou $\log y = \frac{x}{a} + c$, l'équation d'une courbe où les abscisses sont les logarithmes des ordonnées, et qui s'appelle pour cela *logarithmique*.

Trouver la courbe où la sous-tangente est $= X$. On a ici $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{X}$, et $\log y = \int \frac{dx}{X}$. Qu'on fasse, par exemple, $X = 2x$.

Trouver la courbe où la normale est constante. On a ici $y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = a$; de là $y^2 + y^2p^2 = a^2$, ou $p = \frac{(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y}$, ou encore $\frac{y\,dy}{(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} = dx$, d'où $x + c = -(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$, l'équation de cercle.

Trouver la courbe où la normale est $= X$. On a... $y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = X$; de là $\frac{dy}{dx} = \frac{(X^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y}$; quelles valeurs auront lieu pour $X = x$? (*Voy.* n° 88, forme I).

Trouver la courbe où la tangente est constante On a ici $\frac{y}{p}(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = a$; de là $\frac{dy(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y} = dx$.

Trouver la courbe où la tangente est $= X$.

Enfin, trouver la courbe où la normale ou la sous-normale, la tangente ou la sous-tangente, sont égales à une fonction de y.

Problème 2. Soit donnée une équation qui renferme, outre les coordonnées, encore une constante. On propose de trouver la courbe qui coupe, sous un angle dont la tangente trigonométrique est $= a$, toutes les courbes qui résultent de l'équation donnée en faisant varier la constante.

Menons par un point situé à la fois sur l'une des courbes

données et sur la courbe cherchée, deux tangentes, une à chaque courbe. L'angle formé par ces deux tangentes aura la tangente trigonométrique $= a$, et l'on trouvera $a = \frac{p - p'}{1 + p'p}$, où p' représente le coefficient différentiel de la courbe donnée, p celui de la courbe cherchée. Après avoir éliminé la constante entre cette équation et l'équation donnée, on remplacera y' et x' par y et x. L'intégrale de cette équation différentielle convient à la courbe cherchée qui s'appelle, à cause de sa nature, *trajectoire*.

Soit, par exemple, l'équation donnée $y' = mx'$. On obtient pour l'intégrale, d'après le n° 88, forme I,

$$a.\log\left[\frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right] = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right).$$

Si l'on transforme, à l'aide du n° 56, les coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires, de manière que le pôle se trouve à l'origine des coordonnées de la droite proposée, et qu'on mette, en conséquence, $y = u.\sin t$ et $x = u.\cos t$; d'où $\frac{y}{x} = \text{tang}\, t$ et $t = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right)$, l'intégrale devient $a.\log\frac{u}{c} = t$, l'équation de la *spirale logarithmique*, qui jouit, d'après cela, de la propriété de couper toujours le rayon vecteur, qui lui-même est la droite proposée, sous un angle constant, dont la tangente trigonométrique est $= a$.

Si l'angle donné est droit, on a $a = \frac{1}{0}$ et $0 = 1 + pp'$. Soit en même temps l'équation proposée $y'^2 = mx'$. On obtient une ellipse pour la trajectoire *orthogonale* de toutes les paraboles ordinaires exprimées par cette équation.

La trajectoire orthogonale de toutes les paraboles, dont l'équation est $y^{\alpha} = mx^{\beta}$, est aussi une ellipse, comme on trouvera de la même manière.

Problème 3. On propose de trouver la courbe telle, que les perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur toutes les tangentes à la courbe soient égales à a.

Construisons, pour faciliter le problème, une courbe à volonté, et menons, à un point quelconque de la courbe, l'ordonnée, la tangente et la normale; abaissons, de plus, de l'origine des coordonnées, la perpendiculaire $= a$, sur la tangente. On aura alors la proportion suivante : la sous-tangente moins l'abscisse est à a comme la sous-tangente plus la sous-normale est à la normale, c'est-à-dire

$$\left(\frac{y}{p} - x\right) : a = \left(\frac{y}{p} + yp\right) : y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On a par là

$$y - px = a(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale appartient (d'après le n° 89) à une ligne droite dont la distance à l'origine est $= a$, et la solution particulière qui répond aussi au problème, en tant qu'il est exprimé par une équation différentielle (*voy.* n° 90), donne un cercle dont le rayon $= a$ (90).

Problème 4. On propose de trouver la courbe où la somme de l'abscisse et de la sous-normale a un rapport constant à la normale.

On a ici (46) $a(x + yp) = y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$, équation homogène par rapport à x et à y, donc à traiter par le n° 89, III.

L'intégrale complète en est $x^2 + y^2 = \frac{2cx - c^2}{1 - c^2}$, l'équation d'un cercle. La solution particulière qui satisfait

aussi aux conditions du problème, donne $a^2x^2 = (1-n^2)y^2$, un ensemble de deux lignes droites.

Problème 5. Trouver la courbe dont la normale est la moyenne proportionnelle entre une ligne donnée $= a$ et la somme de l'abscisse et de la sous-normale.

On a ici $a(x+yp) = y^2(1+p^2)$. On opère plus aisément en développant yp; on trouvera

$$yp = \frac{a}{2} + \left(\frac{a^2}{4} + ax - y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\frac{adx - 2ydy}{2\left(\frac{a^2}{4} + ax - y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -dx,$$

une différentielle immédiate; l'intégrale complète en est par conséquent $\left(\frac{a^2}{4} + ax - y^2\right)^{\frac{1}{2}} = c - x$, équation d'un cercle. La solution particulière donne l'équation d'une parabole.

Problème 6. Trouver la courbe dont l'arc soit toujours la moyenne proportionnelle entre la double abscisse et l'ordonnée appartenant à son extrémité.

En désignant l'arc par s, on a, d'après le problème, $s^2 = 2xy$. En différenciant, il vient

$$sds = xdy + ydx, \quad \text{d'où (26)} \quad (1+p^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{xp+y}{(2xy)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'intégrale en est

$$\frac{x-y}{c} = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Problème 7. Trouver la courbe dont l'arc soit proportionnel à la racine quarrée de l'abscisse.

C'est la cycloïde qui répond à cette condition. (*Voy.* n° 54, problème 7.)

Intégration des équations différentielles à deux variables du second ordre.

96. Nous avons vu, au n° 86, qu'une équation différentielle du second ordre à deux variables peut être regardée, en général, comme formée par l'élimination d'une constante entre une équation différentielle médiate du premier ordre et sa différentielle, ou, ce qui revient au même, par l'élimination de deux constantes entre une équation primitive et ses différentielles première et seconde. On a vu, de plus, au numéro cité, qu'à une équation primitive à deux constantes, conviennent deux équations différentielles médiates du premier ordre chacune avec une constante, et une équation médiate du second ordre dépourvue de constante. Réciproquement, l'intégration d'une équation différentielle du second ordre, conduira à deux intégrales du premier ordre, ou à deux intégrales premières, c'est-à-dire à deux équations différentielles médiates du premier ordre, dont chacune renferme une constante, et à une intégrale seconde, qui est elle-même la primitive demandée, et qui renfermera deux constantes.

L'intégration de ces équations différentielles du second ordre est sujette encore à de plus grandes difficultés que celle des équations différentielles du premier ordre. Nous n'examinerons, dans ce qui suit, que des cas particuliers, en rapportant pour chaque cas un exemple éclaircissant.

I. Soit à intégrer l'équation différentielle explicite du second ordre, $\frac{d^2y}{dx^2} = X$, où X ne renferme que x.

On en tire $\frac{d^2y}{dx} = Xdx$, ou $d.\frac{dy}{dx} = Xdx$; de là... $\frac{dy}{dx} = \int Xdx + c$. On en tire, de plus,

$$dy = dx\int Xdx + cdx \quad \text{et} \quad y = \int dx \int Xdx + cx + c'.$$

L'intégrale est donc une équation primitive qui a l'équation différentielle proposée pour sa différentielle immédiate du second ordre, parce que les deux constantes c et c' disparaissent par la différenciation effectuée deux fois de suite. (*Voyez* n° 86.)

Exemple. $\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax$.

II. Supposons que l'équation proposée renferme seulement les deux coefficiens différentiels $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, et $\frac{dy}{dx} = p$, de manière qu'on ait $q = P$, où P représente une fonction de p. On a ici, à cause que $q = \frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dx} = P$, donc $dx = \frac{dp}{P}$ et $dy = pdx = \frac{pdp}{P}$. Les deux intégrales

$$x = \int \frac{dp}{P} + c \quad \text{et} \quad y = \int \frac{pdp}{P} + c',$$

satisfont, comme on voit sur-le-champ, chacune en particulier, à l'équation différentielle, et donnent, chacune étant une intégrale première, par l'élimination de p, l'intégrale seconde demandée, c'est-à-dire l'équation primitive cherchée contenant les deux constantes c et c', ce qui doit avoir lieu d'après ce qui précède.

Exemple. Soit $q = \frac{a}{p}$. On a ici $P = \frac{a}{p}$,

$$x = \int \frac{dp}{P} = \frac{1}{a}\int pdp = \frac{p^2}{2a} + c \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{a}\int p^2dp = \frac{p^3}{3a} + c'.$$

En chassant p, l'intégrale cherchée devient

$$8a(x-c)^3 = 9(y-c')^2.$$

III. Supposons que l'équation proposée ne contienne que q et y, de sorte qu'on ait $q = Y$, où Y ne renferme que y. En multipliant l'équation membre à membre par dy, on a $\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx} = Ydy$, d'où l'on tire, en intégrant,

$$\frac{1}{2}.\frac{dy^2}{dx^2} = \int Ydy + c, \quad \text{ou} \quad 2^{\frac{1}{2}}(\int Ydy + c)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy}{dx}.$$

On tire de là

$$dx = \frac{dy}{2^{\frac{1}{2}}(\int Ydy + c)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\int\frac{dy}{(\int Ydy + c)^{\frac{1}{2}}} + c'.$$

Voici encore un autre procédé. On a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{pdp}{dy}.$$

L'équation proposée devient par là

$$\frac{pdp}{dy} = Y, \quad \text{ou} \quad pdp = Ydy.$$

De là

$$\frac{p^2}{2} = \int Ydy + c, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = 2^{\frac{1}{2}}(\int Ydy + c)^{\frac{1}{2}};$$

d'où

$$x = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\int\frac{dy}{(\int Ydy + c)^{\frac{1}{2}}} + c',$$

comme auparavant.

Exemple. Soit $\frac{a^2}{4y^2} + yq = 0$. On a ici $Y = \frac{-a^2}{4y^3}$, $\frac{dx}{2} = \frac{y dy}{(4cy^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$. L'intégrale cherchée en est..... $4c^2(x - c')^2 = 4cy^2 + a^2$. On se convaincra aisément que l'intégrale première développée précédemment soit une des équations différentielles du premier ordre de cette primitive.

IV. Supposons que l'équation renferme p, q et x. On mettra q au lieu de $\frac{dp}{dx}$. Si l'on peut alors intégrer l'équation différentielle par rapport à p et à x, et que l'on parvienne à tirer de l'intégrale l'expression de p en x, on obtient pour l'intégrale seconde $y = \int p dx$. S'il était, au contraire, plus aisé d'exprimer x en p par l'intégrale première, on prendrait pour l'intégrale seconde, en intégrant $\int p dx$ par parties (d'après le n° 65) l'expression... $y = px - \int x dp$.

Exemple. Soit $2qx = p$. On a $2x dp = p dx$, ou.... $\frac{2dp}{p} = \frac{dx}{x}$; de là $cx = p^2$, d'où $p = c^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}}$. On trouve donc

$$y = \int p dx = c^{\frac{1}{2}} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} c^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{3}{2}} + c'.$$

L'intégrale cherchée est par conséquent

$$3(y - c') = 2c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}, \quad \text{ou} \quad 9(y - c')^2 = 4cx^3.$$

Si l'on voulait tirer de l'intégrale première l'expression de x en p, on aurait

$$y = px - \int x dp = \frac{2p^3}{3c} + c',$$

et l'on obtiendrait

$$\frac{3cx^3}{2} = \frac{9}{4}(y - c')^2,$$

le même résultat qu'auparavant, en mettant $\frac{3}{2}c$ au lieu de c.

V. Supposons que l'équation différentielle renferme p, q et y. On mettra, à cause que $q = \frac{dp}{dx}$ et $dx = \frac{dy}{p}$, dans l'équation proposée $q = \frac{pdp}{dy}$, et l'on intégrera par rapport à p et à y. En cherchant à déterminer p par y, au moyen de l'intégrale première, on obtient pour l'intégrale seconde $x = \int \frac{dy}{p}$.

Exemple. Soit $p^2 + 2qy = 0$. On en tire $pdy + 2ydp = 0$, ou $\frac{dy}{y} = \frac{-2dp}{p}$; de là $p^2 = \frac{c}{y}$, ou $p = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$. On trouve donc, pour l'intégrale cherchée,

$$x = \frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} \int y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{2}{3c^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{3}{2}} + c',$$

ou

$$(x - c')^2 . 9c = 4y^3.$$

VI. Soit à intégrer $d^2y + ady.dx + bydx^2 = 0$. Qu'on fasse $y = e^u$; d'où $dy = e^u du$, $d^2y = e^u d^2u + e^u du^2$. L'équation proposée devient par là

$$d^2u + du^2 + adu.dx + bdx^2 = 0.$$

En y faisant, de plus, $du = tdx$, d'où $d^2 = dt.dx$ on obtient

$$dt + t^2dx + atdx + bdx = 0,$$

ou

$$\frac{dt}{t^2+at+b}+dx=0.$$

En mettant maintenant $t=t'-\frac{a}{2}$ et $b-\frac{a^2}{4}=-m^2$, on trouve

$$\frac{dt'}{t'^2-m^2}+dx=0,$$

dont l'intégrale est, d'après le n° 59,

$$x=\frac{-1}{2m}\log\frac{1}{c}\left(\frac{t'-m}{t'+m}\right);\quad \text{d'où}\quad t'=\frac{m(e^{2mx}+c)}{e^{2mx}-c}.$$

En y mettant $e^{2mx}=z$, d'où $2mx=\log z$ et $dx=\frac{dz}{2mz}$, on obtient

$$\int t'dx=\int\frac{(z+c)dz}{2z(z-c)}=\log\left[\frac{c'(z-c)}{z^{\frac{1}{2}}}\right]\ (\text{n° } 59).$$

On tire de là

$$e^{\int t'dx}=\frac{c'(e^{2mx}-c)}{e^{mx}}.$$

On a par conséquent, pour l'intégrale cherchée,

$$y=e^u=e^{\int tdx}=e^{\int t'dx}.e^{-\frac{a}{2}x}=\frac{c'\left(e^{2mx}-c\right)}{e^{\left(m+\frac{a}{2}\right)x}}$$

$$=c'e^{\left(m-\frac{a}{2}\right)x}-cc'e^{-\left(m+\frac{a}{2}\right)x}.$$

En désignant les valeurs de t dans l'équation $t^2+at+b=0$, par n et n', on a $n'=m-\frac{a}{2}$, et $n=-m-\frac{a}{2}$ L'inté-

grale se change par là, en y mettant encore c au lieu de $-cc'$, en celle-ci : $y = ce^{nx} + c'e^{n'x}$.

En substituant, on peut aisément se convaincre que $y = ce^{nx}$, aussi bien que $y = c'e^{n'x}$, satisfera à l'équation différentielle proposée, d'où il suit que chacune de ces deux valeurs, ne contenant qu'une seule constante arbitraire, est une intégrale particulière de l'équation proposée. (*Voyez* n° 94.)

Si $n = n'$, il vient $y = (c + c')e^{nx}$, équation qui ne renferme qu'une seule constante, et qui, par conséquent, n'est pas l'intégrale complète; mais, dans ce cas, on a pour l'équation auxiliaire en t, celle-ci :

$$\frac{dt}{(t-n)^2} + dx = 0, \text{ d'où } \frac{-1}{t-n} + x + c = 0,$$

ou

$$t = \frac{1}{x+c} + n;$$

donc l'intégrale complète

$$y = e^{\int t dx} = e^{\int \frac{dx}{x+c}} . e^{nx} = c' . e^{nx}(x+c).$$

VII. Soit à intégrer $d^2y + ady dx + by dx^2 = u dx^2$ où u est une fonction de x. On mettra $y = Xz$, dans l'équation proposée qui, se décomposera alors d'une manière analogue à celle du n° 88, forme II, en ces deux suivantes :

$$d^2z + adz dx + bz dx^2 = 0,$$

et

$$2dX dz + azdX dx + zd^2X = u dx^2.$$

De la première on tire, d'après l'équation que nous venons de traiter,

$$z = ce^{nx} + c'e^{n'x} = c'e^{n'x}\left(\frac{c}{c'}e^{(n-n')x} + 1\right),$$

ou, en mettant $n - n' = r$,

$$= c'e^{n'x}\left(\frac{c}{c'}e^{rx} + 1\right).$$

En mettant dans la seconde équation $dX = X'dx$, on obtiendra

$$dX' + \left(a + \frac{2dz}{zdx}\right)X'dx = \frac{u}{z}dx.$$

On en tire (n° 88, forme II) la valeur de X', et il vient ensuite

$$X = \int X'dx = \int \frac{e^{rx}dx}{c'\left(\frac{c}{c'}e^{rx} + 1\right)} . \int e^{-nx} . udx\left(\frac{c}{c'}e^{rx} + 1\right).$$

L'intégration par parties (n° 65) donne, puisque

$$\int \frac{e^{rx}dx}{c'\left(\frac{c}{c'}e^{rx} + 1\right)^2} = \frac{-1}{cr\left(\frac{c}{c'}e^{rx} + 1\right)},$$

$$X = \frac{e^{rx}\int e^{-nx}udx - \int e^{-n'x}udx}{c'r\left(\frac{c}{c'}e^{rx} + 1\right)}.$$

On trouve enfin, en ajoutant aux deux intégrales renfermées dans l'expression de X, les constantes arbitraires m et m', et mettant ensuite c et $-c'$ au lieu de $\frac{m}{n-n'}$ et de $\frac{m'}{n-n'}$, pour l'intégrale cherchée,

$$y = Xz = ce^{nx} + c'e^{n'x} + \frac{e^{nx}\int e^{-nx}udx - e^{n'x}\int e^{-n'x}udx}{n-n'}.$$

Problème 4. Trouver la courbe où le quarré du rayon de courbure est proportionnel à l'abscisse.

On a ici $\pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=a^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}$, ou, d'après le n° 96, IV,

$$\pm(1+p^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.dp}{dx},\text{ d'où }\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}=\mp\frac{a^{\frac{1}{2}}dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ou, en intégrant,

$$2x^{\frac{1}{2}}+2c=\mp\frac{a^{\frac{1}{2}}.p}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}};$$

de là

$$dy=\frac{2(x^{\frac{1}{2}}+c)dx}{[a-4(x^{\frac{1}{2}}+c)^2]^{\frac{1}{2}}};$$

en y mettant $x^{\frac{1}{2}}+c=z$, d'où $x=(z-c)^2$ et $dx=2(z-c)dz$, il vient

$$y=\int\frac{4z(z-c)dz}{(a-4z^2)^{\frac{1}{2}}}=c(a-4z^2)^{\frac{1}{2}}+4\int\frac{z^2dz}{(a-4z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'intégrale du dernier terme se trouve à l'aide du n° 65 (A).

Problème 5. Quelle est la courbe dont la caustique appartenante jouit de la propriété que l'une de ses coordonnées soit $=a$, supposé que les rayons, parallèles entre eux, tombent perpendiculairement sur l'axe des abscisses?

On a ici (92) $y+\frac{1-p^2}{2q}=a$ et $x-\frac{p}{q}=a$.

Il est quelquefois bon de regarder, dans une équation différentielle, au lieu de x, une autre variable ou la fonction d'une autre variable, comme la variable indépen-

Problème 2. Trouver la courbe où le rayon de courbure est constant.

On a ici $\pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=a$. A l'aide du n° 96, II, on obtient pour la courbe demandée un cercle du rayon $=a$.

Problème 3. Quelle est la courbe où le rayon de courbure est à la normale comme $1:n$?

On a, par l'énoncé du problème,

$$\pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=\frac{y(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{n},\quad \text{ou}\quad \frac{1+p^2}{q}=\mp\frac{y}{n}.$$

Par le n° 96, V, on trouve successivement

$$n(1+p^2)=\mp\frac{ypdp}{dy},\quad \pm\frac{ndy}{y}=\frac{pdp}{1+p^2},$$

ou, en intégrant,

$\log(cy^{\pm n})=\log(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire $cy^{\pm n}=(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$; de là

$$dx=-\frac{dy}{(c^2y^{\pm 2n}-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

En ayant égard d'abord au signe positif de l'exposant et faisant $n=\frac{1}{2}$, on obtient $dx=\frac{dy}{(c^2y-1)^{\frac{1}{2}}}$; de là

$$x+c'=\frac{2(c^2y-1)^{\frac{1}{2}}}{c^2},$$

l'équation d'une parabole.

Le lecteur cherchera lui-même les courbes, si l'on a égard au signe négatif et que l'on fasse en même temps $n=\frac{1}{2}$ et ensuite $n=1$.

ou [puisque de $dx^2 + dy^2 = ds^2$ on tire $dy = (ds^2 - dx^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\mp \frac{ds(ds^2 - dx^2)^{\frac{1}{2}}}{d^2x} = a^{\frac{1}{2}} . s^{\frac{1}{2}}.$$

On en tire

$$\mp \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} . \frac{d^2x}{(ds^2 - dx^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et en intégrant,

$$c \mp 2s^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} . \text{arc}\left(\sin = \frac{dx}{ds}\right),$$

ou

$$\frac{dx}{ds} = \sin\left(\frac{c \mp 2s^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right),$$

d'où enfin

$$x = \int ds . \sin\left(\frac{c \mp 2s^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right);$$

en développant, par le n° 30, le sin. en série, et intégrant, on obtient x, exprimé par une série procédant suivant les puissances entières de l'arc.

Remarque. Désignons par $u'' = 0$ une équation différentielle du second ordre à deux variables, contenant, outre x, y, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, encore la constante c. (*Voyez* n° 90.)

En différenciant cette équation différentielle par rapport à c, on obtient $\frac{du''}{dc} = 0$. Désignons, de plus, par $v'' = 0$, l'équation différentielle du second ordre, formée

par l'élimination de c entre les deux équations $u'' = 0$ et $\frac{du''}{dc} = 0$. La primitive qui appartient à l'équation différentielle $v'' = 0$, laquelle nous désignerons par $v = 0$, aura avec la primitive $u = 0$ appartenant à l'équation différentielle $u'' = 0$, pour une valeur déterminée de x, les mêmes valeurs de y, p, q, et en outre de $r = \frac{d^3y}{dx^3}$. (*Comparez* n°s 90 et 94.)

Les courbes qui conviennent à ces deux équations $u = 0$ et $v = 0$, dont la première appartient aux courbes enveloppées, et la dernière à la courbe enveloppante, ont par conséquent, dans ce point, non-seulement un contact du premier et du second ordre, mais aussi un contact du troisième ordre.

Le lecteur conclura aisément de quelle forme doit être l'équation d'une courbe enveloppante, pour qu'elle ait un contact d'un ordre quelconque avec les courbes enveloppées correspondantes; aussi prouvera-t-on, sans peine, à l'aide du n° 90, qu'on n'a qu'à différencier une équation différentielle du second ordre par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$, et à éliminer ensuite ce coefficient différentiel, pour parvenir à la solution particulière correspondante.

Comment pourra-t-on tirer d'une équation différentielle d'un ordre quelconque, la solution particulière correspondante?

Intégration des équations différentielles du troisième ordre.

98. Quant aux équations différentielles du troisième ordre, lesquelles renferment, outre x, y, p, q, encore $r = \frac{d^3y}{dx^3}$, nous ne rapporterons ici que l'intégration des trois formes suivantes.

I. Soit $r = X$, où X ne contient que x.

On a successivement

$$\frac{d^3y}{dx^3} = X, \quad d.\frac{d^2y}{dx^2} = Xdx, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \int Xdx + c,$$

$$d.\frac{dy}{dx} = dx\int Xdx + cdx, \quad \frac{dy}{dx} = \int dx\int Xdx + cx + c',$$

$$dy = dx\int dx\int Xdx + cxdx + c'dx,$$

$$y = \int dx\int dx\int Xdx + \frac{cx^2}{2} + c'x + c'';$$

l'intégrale troisième cherchée contient donc trois constantes arbitraires (*voyez* n° 86; *comparez* n° 96), et l'équation proposée est sa différentielle immédiate du troisième ordre (85).

II. Soit $r = f(q)$. Puisque $rdx = dq$, il vient

$$dx = \frac{dq}{f(q)}, \quad \text{d'où} \quad x = \int\frac{dq}{f(q)};$$

on trouve, de plus,

$$y = \int pdx = \int dx\int qdx = \int\frac{dq}{f(q)}.\int\frac{qdq}{f(q)}.$$

L'élimination de q entre ces deux intégrales donne l'intégrale demandée, qui renferme trois constantes arbitraires.

Exemple. Soit $r = q^2$.

III. Soit $r = f(p)$. En multipliant cette équation par qdx, il vient (à cause de $qdx = dp$ et de $rdx = dq$) $qdq = dp.f(p)$, d'où l'on tire, en intégrant,

$$q = [2\int f(p).dp]^{\frac{1}{2}},$$

ou, à cause de $q = \frac{dp}{dx}$,

$$x = \int \frac{dp}{[2\int f(p)dp]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad y = \int p dx = \int \frac{p dp}{[2\int f(p)dp]^{\frac{1}{2}}}.$$

L'élimination de p, entre ces deux intégrales, donne l'intégrale demandée.

Exemple. Soit $r = p^{-3}$.

Nous laissons au lecteur à trouver l'intégration des trois formes des équations différentielles de l'ordre n,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right),$$

pour quelques conditions particulières.

Intégration des équations différentielles à deux variables, par approximation.

99. Il reste encore à montrer comment on peut trouver la valeur d'une intégrale par approximation.

I. X désignant une fonction de x, on cherche la valeur de l'intégrale $y = \int X dx$, entre les limites $x = a$ et $x = b$. (*Voyez* n° 72.)

Par le théorème de Taylor (17), on a, si en même temps x accroît de h et y de k,

$$y + k = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

Or, on a, par l'intégrale donnée,

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}, \quad \text{etc.};$$

on a donc

$$k = Xh + \frac{dX}{dx} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

Mettons-y $b-a$, au lieu de h, et a, au lieu de x, et désignons les expressions X, $\frac{dX}{dx}$, $\frac{d^2X}{dx^2}$, ..., changées par là, respectivement par A, A', A''... On aura alors pour k ou pour y, pris entre les limites $x=a$ et $x=b$, la série suivante :

$$A(b-a)+\frac{A'(b-a)^2}{1.2}+\frac{A''(b-a)^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Cette série sera convergente et donnera assez exactement la valeur demandée de y, par un petit nombre des premiers termes, lorsque la quantité $b-a$ est fort petite. Mais, au cas contraire, on décomposera la quantité $b-a$ en un nombre arbitraire de parties, savoir en

$$\alpha-a,\ \alpha_1-\alpha,\ \alpha_2-\alpha_1,\ldots\ldots b-\alpha_n,$$

et l'on cherchera ensuite $y=\int X dx$ successivement entre les valeurs $\alpha-a$, $\alpha_1-\alpha$, ... etc., par le moyen de la série ci-dessus. La somme de toutes ces valeurs particulières sera équivalente à la valeur de y cherchée entre les limites $x=a$ et $x=b$.

Le lecteur appliquera, sans difficulté, cette méthode pour trouver des valeurs approchées, à l'expression..

$$X=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},\ \text{entre les limites de } x=\frac{1}{2} \text{ et } x=\frac{3}{4}$$

c'est-à-dire qu'il cherchera la valeur pour

$$\text{arc}\left(\sin=\frac{3}{4}\right)-\text{arc}\left(\sin=\frac{1}{2}\right).$$

II. Soit proposé de trouver dans une équation différentielle du premier ordre, où dx et dy se trouvent mêlés ensemble, une valeur approchée de y, entre les limites $x=a$ et $x=b$.

En supposant que y soit $=c$, lorsque $x=a$, on aura, lorsque $x=a+h$,

$$y=c+k=c+\frac{dc}{da}h+\frac{d^2c}{da^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots \quad (17).$$

Or, il y a la même relation entre a, c, $\frac{dc}{da}$ qu'entre x, y, $\frac{dy}{dx}$; on n'aura donc qu'à mettre dans l'équation différentielle proposée, a au lieu de x, et c au lieu de y, pour en tirer $\frac{dc}{da}$. Mais puisque $\frac{dc}{da}$ renferme encore c, y se trouvant, en général, aussi dans l'équation différentielle, la valeur cherchée de y restera indéterminée. La quantité c tiendra précisément lieu de la constante arbitraire.

D'ailleurs, la série trouvée donnera assez exactement, si la quantité $h=b-a$ est fort petite, la valeur cherchée de y, par un petit nombre de termes. Pour trouver ensuite la valeur de y pour une valeur plus considérable que h, on pourra mettre $a+h=a_1$, $c+k=c_1$, et pousser ainsi plus loin l'approximation, par un procédé semblable au précédent.

Exemple I. Soit $dy+ydx=x^n dx$. On propose de trouver la valeur de y entre $x=a$ et $x=b$.

On a $\frac{dc}{da}=a^n-c$, $\frac{d^2c}{da^2}=na^{n-1}-a^n+c$, etc.

On obtient par là

$$y=c+(a^n-c)(b-a)+(na^{n-1}-a^n+c).\left(\frac{b-a}{1.2}\right)^2+\ldots$$

Il sera bon de chercher la valeur de y par le n° 88, et de comparer cette valeur avec la série que nous venons de trouver.

Exemple II. $dy + \frac{y}{x} dx = x^n dx$.

III. Soit proposé de trouver une valeur approchée pour y, dans une équation différentielle du second ordre.

En appliquant le théorème de Taylor, comme ci-dessus, on tirera la valeur de $\frac{d^2c}{da^2}$ de l'équation différentielle proposée; mais cette valeur sera déterminée par c et $\frac{dc}{da}$. Ces deux valeurs tiendront par conséquent lieu de deux constantes arbitraires.

Exemple III. $d^2y + ax^n y dx^2 = 0$. (*Compar.* n° 96, VI.)

Il est évident, par ce qui précède, qu'on peut de même faire usage du théorème de Taylor pour trouver des valeurs approchées de y dans une équation différentielle de l'ordre n, et que les n premiers termes de la série rapportée sous II, resteront indéterminés et qu'ils tiendront lieu de n constantes arbitraires.

De l'intégration des équations différentielles partielles.

100. Nous allons exposer, dans ce qui suit, les propositions les plus importantes concernant l'intégration des équations différentielles partielles. Ceci mettra encore plus en évidence ce qui a été dit sur les équations de cette espèce, aux n°s 76 et suivans, et fournira en même temps au lecteur l'occasion d'étendre ses recherches sur les surfaces courbes.

Les équations différentielles du premier ordre renfermant trois quantités variables, se distinguent en équations différentielles *totales* et *partielles*. Les premières sont de la forme

$$dz = p dx + q dy.$$

Leur intégration a été enseignée au n° 87, pour le cas que p et q ne renferment que x et y.

Les équations différentielles partielles du premier ordre sont des équationstelles qu'elles renferment, outre les quantités x, y, z, encore les deux coefficiens différentiels partiels $\frac{dz}{dx} = p$ et $\frac{dz}{dy} = q$ (76); ce n'est que des équations de cette espèce qu'il s'agira dans ce qui suit.

Ainsi soit donné

$$Pp + Qq = R,$$

où $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$, et où P, Q, R renferment les trois variables x, y, z. On tire de cette équation

$$p = \frac{R - Qq}{P};$$

substituant cette valeur dans la différentielle totale..... $dz = pdx + qdy$ (76), on obtient

$$Pdz - Rdx = q(Pdy - Qdx).$$

Si l'équation $Pdz - Rdx = 0$ ne renferme que z, x, dz et dx, que l'équation $Pdy - Qdx = 0$ renferme seulement y, x, dy et dx, et que la première soit intégrable par le facteur μ, et la dernière par le facteur μ' (*voy.* n° 86), de sorte qu'on ait

$$\mu(Pdz - Rdx) = du \quad \text{et} \quad \mu'(Pdy - Qdx) = du',$$

il vient

$$\frac{du}{\mu} = \frac{q.du'}{\mu'}, \quad \text{ou} \quad du = \frac{\mu q.du'}{\mu'}.$$

La différentielle du étant une différentielle immédiate, il faut que $\frac{\mu q.du'}{\mu'}$ en soit pareillement une. On pourra donc mettre

$$\frac{\mu q}{\mu'} = \frac{d.\varphi(u')}{du'} = \varphi'(u'),$$

et l'on obtient ensuite, en intégrant,

$$u = \int \varphi'(u')du' = \varphi(u').$$

Cela posé, il n'est besoin, pour obtenir l'intégrale de l'équation différentielle partielle $Pp + Qq = R$, que de trouver, par les deux équations

$$Pdz - Rdx = 0 \quad \text{et} \quad Pdy - Qdx = 0,$$

les intégrales $u = a$ et $u' = b$, et de mettre ensuite $u = \varphi(u')$, où φ indique une *fonction arbitraire*.

De $u = a$, $u' = b$, $u = \varphi(u')$, on tire

$$u - a = u' - b, \quad \text{ou} \quad u - \varphi(b) = u' - b,$$

une seconde forme de l'intégrale cherchée qui renferme deux constantes arbitraires a et b, mais qui, par la fonction arbitraire φ, sont dépendantes l'une de l'autre.

En différenciant chacune des deux formes de l'intégrale cherchée, $u = \varphi(u')$, aussi bien que $u - \varphi(b) = u - b$, d'abord par rapport à z et à x, et ensuite par rapport à z et à y, et éliminant entre les deux différentielles et l'intégrale, $\varphi(u')$ et $\varphi'(u')$ dans la première forme, et a et b dans la forme seconde, on retombe sur l'équation différentielle proposée.

Mais si l'on éliminait q au lieu de p entre l'équation proposée $Pp + Qq = R$, et la différentielle $dz = pdx + qdy$, on obtiendrait

$$Qdz - Rdy = p(Qdx - Pdy).$$

Désignant les intégrales des équations

$$Qdz - Rdy = 0 \quad \text{et} \quad Qdx - Pdy = 0,$$

par $u'' = a$ et $u' = b$, on aurait, par les mêmes raisons qu'auparavant, pour l'intégrale cherchée,

$$u'' = \varphi(u').$$

En divisant ces deux expressions

$$Pdz - Rdx = q(Pdy - Qdx) \quad \text{et} \quad Qdz - Rdy = p(Qdx - Pdy),$$

la première par la seconde, il vient

$$Pdz - Rdx = -\frac{q}{p}(Qdz - Rdy).$$

Si l'on avait alors

$$Pdz - Rdx = \frac{du}{\mu} \quad \text{et} \quad Qdz - Rdy = \frac{du''}{\mu''},$$

on n'aurait, par les raisons indiquées, qu'à mettre

$$-\frac{q\mu}{p\mu''} = \varphi'(u'').$$

L'intégrale cherchée devient par là

$$u = \varphi(u'').$$

Il résulte donc, de ce que nous venons de prouver, que pour parvenir à l'intégrale de l'équation différentielle $Pp + Qq = R$, il suffit d'intégrer deux quelconques des trois équations auxiliaires

$$Pdz - Rdx = 0, \quad Pdy - Qdx = 0, \quad Qdz - Rdy = 0.$$

Dans l'intégrale $u = \varphi(u')$, on peut déterminer la fonction arbitraire, par la condition que le corps exprimé par l'intégrale passe par la courbe formée par l'intersection de deux surfaces courbes dont les équations soient de la forme

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

En éliminant entre les quatre équations

$$f(x, y, z) = 0, \; F(x, y, z) = 0, \; u' = t, \; u = \varphi(t),$$

les quantités x, y, z, on parvient à une équation qui renferme encore t et $\varphi(t)$, et qui servira par conséquent à déterminer $\varphi(t)$ par t.

Les exemples suivans éclairciront ce que nous venons de dire.

Exemple I. Soit l'équation différentielle proposée.... $yp - xq = 0$.

Les trois équations auxiliaires sont

$$ydz = 0, \quad ydy + xdx = 0, \quad xdz = 0.$$

La première donne $z = a$; la seconde donne $\frac{y^2 + x^2}{2} = b$,

l'intégrale cherchée est par conséquent

$$z = \varphi\left(\frac{y^2 + x^2}{2}\right), \quad \text{ou} \quad z = \varphi(y^2 + x^2).$$

En différenciant cette intégrale par rapport à x et à z, et par rapport à y et à z, et désignant $\mathrm{d}.\frac{\varphi(y^2 + x^2)}{\mathrm{d}(y^2 + x^2)}$ par $\varphi'(y^2 + x^2)$, il vient

$$p = 2x\varphi'(y^2 + x^2) \quad \text{et} \quad q = 2y\varphi'(y^2 + x^2);$$

de là on tire, en divisant,

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{y}, \quad \text{ou} \quad py = qx,$$

l'équation différentielle proposée.

L'intégrale se pourra aussi exprimer ainsi

$$z - \varphi(b) = x^2 + y^2 - b.$$

En différenciant par rapport à z et à x, et par rapport à z et à y, il vient $p = 2x$, $q = 2y$. Ces deux équations ne renfermant pas les quantités constantes a et b, on trouve immédiatement, en divisant, $\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$, ou $py = qx$, comme auparavant.

Quant à la signification géométrique de l'intégrale trouvée $z = \varphi(y^2 + x^2)$, on a déjà démontré, au n° 81, qu'elle répond à tous les corps de révolution dont l'axe de révolution est celui des z. La propriété exprimée par l'équation différentielle $py = qx$, convient donc à tous les corps de cette espèce.

Déterminons d'abord la fonction arbitraire par la condition que le corps de révolution passe par la circonférence d'un cercle qui, mené parallèlement au plan coordonné

des zy, soit la section formée par un plan parallèle au plan des zy, pour $x = h$, avec une sphère dont le centre est à l'origine. Il faudra donc, des quatre équations

$$x^2 + y^2 = t,\ z = \varphi(t),\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ x = h,$$

chasser les quantités x, y, z. On obtient ainsi

$$h^2 + y^2 = t,\ z = \varphi(t),\ h^2 + y^2 = r^2 - z^2,\ \text{ou}\ r^2 - z^2 = t,$$

et enfin

$$\varphi(t) = (r^2 - t)^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation du corps, pour la condition donnée, est donc

$$z = (r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}},\quad \text{ou}\quad z^2 + x^2 + y^2 = r^2,$$

l'équation de la sphère.

En second lieu, supposons que sur la surface d'un corps soit située une ligne droite qui passe par l'origine des coordonnées, et qui peut donc être regardée comme l'intersection des plans

$$x + by + cz = 0 \quad \text{et} \quad x + b'y + c'z = 0,$$

ou qui peut être représentée par ces deux équations :

$$z = ax \quad \text{et} \quad y = a'x \quad (\text{n}^\circ\ 77).$$

On obtient, pour l'équation cherchée du corps,

$$z^2(1 + a'^2) = a^2(x^2 + y^2),$$

l'équation d'un cône droit.

Exemple II. Soit $px + qy = 0$. L'intégrale en est.... $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

L'intégrale résulte des équations d'une ligne droite,

$$z = a \quad \text{et} \quad y = bx,$$

si l'on fait $a = \varphi(b)$. Le corps correspondant est donc engendré par une droite qui, parallèle au plan des xy, passe par l'axe des z. Pour la condition qu'un plan mené perpendiculairement à l'axe des y, dans la distance $= m$ à l'origine des coordonnées, coupe le corps suivant une ellipse, dont l'équation $a^2z^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, il vient

$$\frac{y}{x} = t, \; z = \varphi(t), \; a^2z^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \; y = m;$$

de là

$$\varphi(t) = \frac{b(a^2t^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{at}.$$

L'équation du corps correspondant est donc

$$z = \frac{b(a^2y^2 - m^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{ay}.$$

En faisant $b = a$ et $y = m - y'$, on obtient l'équation du *coin-conoïde* considéré au n° 82, où nous avons déjà vu que ce corps est engendré par une ligne droite.

Exemple III. Soit $axp - q[b(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} - ay] = 0$. La première des trois équations auxiliaires donne $z = c$. La seconde devient par là

$$axdy = aydx - bdx(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte

$$ay - b(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} = c'x.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$ay - b(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} = x.\varphi(c), \text{ ou } ay - b(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} = x.\varphi(z).$$

Or, cette équation résulte des équations de la ligne droite

$$z = c, \quad \text{et} \quad y = \frac{c'}{a}x + \frac{b}{a}(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}},$$

si l'on fait $c' = \varphi(c)$. La ligne génératrice se meut donc, parallèlement au plan des yx, sur la circonférence d'une ellipse dont les demi-axes sont a et b, et dont le centre est à l'origine des coordonnées.

Déterminons la fonction arbitraire par la condition que ce corps, par un plan perpendiculaire à l'axe des x, dans la distance $x = m$, à l'origine, soit coupé suivant une ellipse dont les demi-axes soient a et b', il vient

$$\varphi(z) = \frac{b'(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} - b(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}{m};$$

ce corps, terminé par deux ellipses parallèles entre elles, a pour équation

$$may = (a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}.(mb - bx + b'x).$$

Les sections faites par des plans menés perpendiculairement à l'axe des x, sont toutes des ellipses. Le volume s'obtiendra donc par le n° 82.

En faisant $b' = 0$, on tombe sur l'équation du coinconoïde considéré à l'exemple précédent.

En faisant $b' = b$, on obtient l'équation du cylindre droit qui a pour base une ellipse.

Le lecteur s'exercera encore, suivant la même méthode, sur les exemples suivans.

Exemple IV. Soit $px + qy = z$.

Exemple V. Soit $ap + bq = c$.

101. Ce que nous venons d'exposer au numéro précé-

dent se pourra aussi étendre aux équations différentielles partielles du premier ordre, qui renferment plus de trois quantités variables.

Soit, par exemple, z dépendant des trois quantités u, x, y, qui sont indépendantes entre elles, on aura donc (85)

$$dz = ndu + pdx + qdy,$$

où n, p, q ne contiennent que u, x, y, et où, en outre, $n = \frac{dz}{du}$, $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$. Soit l'équation différentielle proposée

$$Nn + Pp + Qq = R,$$

où N, P, Q, R sont des fonctions de z, u, x, y. En éliminant n entre les deux équations précédentes, il vient

$$Ndz - Rdu = p(Ndx - Pdu) + q(Ndy - Qdu).$$

Si les équations

$$Ndz - Rdu = 0, \quad Ndx - Pdu = 0, \quad Ndy - Qdu = 0$$

sont intégrables par elles-mêmes ou par le moyen des facteurs μ, μ', μ'', de manière qu'on ait

$$Ndx - Pdu = \frac{1}{\mu}.dT, \quad Ndy - Qdu = \frac{1}{\mu'}.dU,$$

$$Ndz - Rdu = \frac{1}{\mu''}.dV,$$

il vient

$$dV = \frac{p\mu''}{\mu}.dT + \frac{q\mu''}{\mu'}dU;$$

dV étant ici une différentielle complète, il faut que..

$\frac{p\mu''}{\mu}.dT + \frac{q\mu''}{\mu'}dU$ en soit pareillement une. On pourra donc, d'après les notations adoptées au numéro précédent, poser

$$\frac{p\mu''}{\mu} = \varphi'(T), \quad \frac{q\mu''}{\mu'} = \psi'(U),$$

ou

$$\frac{p\mu''}{\mu}dT + \frac{q\mu''}{\mu'}.dU = \varphi'(U, T);$$

il en résulte donc, ou

$$V = \varphi(T) + \psi(U), \quad \text{ou} \quad V = \varphi(U, T).$$

Nous voilà en état, d'après cela, d'intégrer les équations différentielles partielles du premier ordre à trois variables, lorsque les coefficiens différentiels partiels p et q y passent le premier degré. En développant p dans une équation de cette espèce, on a

$$p = f(q, x, y, z),$$

où z dépend de x et de y, mais q de z, de x et de y. On a donc, comme il est clair par le n° 85,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}.\frac{dz}{dy} + \frac{dp}{dq}.\frac{dq}{dz}.\frac{dz}{dy} + \frac{dp}{dq}.\frac{dq}{dy},$$

et

$$\frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dz}.\frac{dz}{dx}.$$

L'équation de condition $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ (n° 76) se change par là, en y mettant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, en celle-ci

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}q = \frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dq}.\frac{dq}{dy} + \left(p - q\frac{dp}{dq}\right).\frac{dq}{dz}.$$

Mettant maintenant $\frac{dq}{dz}=\alpha$, $\frac{dq}{dx}=\beta$, $\frac{dq}{dy}=\gamma$, il vient

$$\beta-\frac{dp}{dq}\gamma+\left(p-q\frac{dp}{dq}\right)\alpha=\frac{dp}{dy}+q.\frac{dp}{dz}.$$

En comparant cette équation à celle que nous avons considérée plus haut, savoir, à $Nn+Pp+Qq=R$, il faudra changer mutuellement les quantités qui sont jointes dans les équations suivantes :

$$n=\alpha,\ p=\beta,\ q=\gamma,\ u=z,\ z=q,\ x=x,\ y=y,$$
$$N=p-q\frac{dp}{dq},\ P=1,\ Q=-\frac{dp}{dq},\ R=\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}.$$

Les trois équations auxiliaires

$$Ndx-Pdu=0,\quad Ndy-Qdu=0,\quad Ndz-Rdu=0,$$

deviennent donc ici

$$\left(p-q\frac{dp}{dq}\right)dx-dz=0,$$
$$\left(p-q\frac{dp}{dq}\right)dy+\frac{dp}{dq}.dz=0,$$
$$\left(p-q\frac{dp}{dq}\right)dq-\left(\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}\right)dz=0.$$

Le lecteur déduira sans peine, par la division, ou par l'élimination de dz entre deux quelconques de ces trois équations, trois autres équations.

Les exemples suivans serviront à l'application de ces formules.

Exemple I. Soit $p^2+q^2=m^2$. On a $p=(m^2-q^2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{dp}{dy}=\frac{dp}{dz}=0$, $\frac{dp}{dq}=\frac{-q}{(m^2-q^2)^{\frac{1}{2}}}$. Les trois équations

une seule et même équation différentielle. Prenons pour exemple les deux équations primitives traitées n° 90,

$$y = cx + n(1 + c^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad y^2 = cx + n^2 + \frac{c^2}{4},$$

qui ont toutes deux la solution particulière

$$y^2 + x^2 = n^2;$$

tâchons maintenant de déduire la dernière de la première. On a

$$y = cx + n(1 + c^2)^{\frac{1}{2}};$$

élevant les deux membres au quarré, il vient

$$y^2 = c^2x^2 + 2nc(1 + c^2)^{\frac{1}{2}}x + n^2(1 + c^2);$$

en y mettant, au lieu de x, $n^2 - y^2$ (valeur tirée de la solution particulière $y^2 + x^2 = n^2$), il vient

$$y^2 = \frac{2ncx}{(1 + c^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{n^2 + 2n^2c^2}{1 + c^2};$$

faisant maintenant $\dfrac{2nc}{(1 + c^2)^{\frac{1}{2}}} = a$, d'où $c^2 = \dfrac{a^2}{4n^2 - a^2}$,

on obtient

$$y^2 = ax + n^2 + \frac{a^2}{4},$$

qui est la dernière des équations primitives ci-dessus.

Les deux équations différentielles médiates, appartenant à ces équations primitives, sont

$$y = px + n(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad y^2 = 2xyp + n^2 + y^2p^2,$$

dont la dernière se réduit à la première, lorsqu'on y

substitue la valeur tirée de la solution particulière.... $y^2p^2 = p^2(n^2 - x^2)$.

Tout cela a également lieu pour les surfaces; car la combinaison de $U = 0$ et $\frac{dU}{da} = 0$ conduit aussi à un nombre infini d'équations primitives $U = 0$, qui ont toutes la même solution particulière $V = 0$, et dont les équations différentielles, combinées avec $V = 0$, se peuvent réduire à une et la même équation différentielle. Dans notre exemple, les intégrales trouvées sont deux de ce nombre infini des équations primitives différentes. Mais puisque la fonction $b = f(a)$ reste en général indéterminée, on ne peut ni trouver la solution particulière de la surface enveloppante $V = 0$, ni ramener les équations différentielles médiates des intégrales, par le moyen de l'équation $V = 0$, à une et la même équation différentielle. Montrons seulement comment on peut déduire la première des intégrales trouvées ci-dessus de la dernière, en combinant les équations $U = 0$ et $\frac{dU}{da} = 0$. On a

$$z^2 - m^2[(x-c)^2 + (y-b)^2] = U = 0,$$
$$x - c + \frac{db}{dc}(y-b) = \frac{dU}{dc} = 0.$$

En mettant dans la dernière équation $\frac{db}{dc} = \frac{-(m^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$, multipliant cette équation par a, élevant ensuite les deux membres au quarré et ajoutant le résultat à la première équation, on obtient, après avoir extrait la racine,

$$\pm z = (x-c)(m^2-a^2)^{\frac{1}{2}} + (y-b)a.$$

En y mettant $-c(m^2-a^2)^{\frac{1}{2}} - ba = d$, on obtient la seconde intégrale trouvée ci-dessus.

En faisant dans la première intégrale $b = ac$, on trouve

$$z^2 - m^2[(x-c)^2 + (y-ac)^2] = U = 0$$

et

$$\frac{dU}{dc} = 0 = -(x-c) - a(y-ac);$$

d'où l'on tire, par l'élimination de c, la solution particulière

$$V = 0 = z^2 - \frac{-m^2(ax-y)^2}{1+a^2}.$$

Il faut encore observer que, puisqu'on tire de l'équation différentielle $1 + p^2 + q^2 = 1 + m^2$, la formule pour l'aire de la surface des deux intégrales ci-dessus sera

$$(1+m^2)^{\frac{1}{2}} \iint dx\,dy = (1+m^2)^{\frac{1}{2}} . \int y\,dx,$$

ce qui fait voir qu'une portion de ces surfaces a un rapport constant $= (1+m^2)^{\frac{1}{2}} : 1$, à sa projection sur le plan des xy.

Exemple II. Soit $z^2(1+p^2+q^2) = m^2$. On a donc

$$p = \frac{(m^2 - z^2 - q^2z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}, \quad \frac{dp}{dq} = \frac{-qz}{(m^2 - z^2 - q^2z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{-m^2}{z^2(m^2 - z^2 - q^2z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Les trois équations auxiliaires donnent

$$dz = \frac{(m^2 - z^2)dx}{z(m^2 - z^2 - q^2z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{(m^2 - z^2)dy}{z} = qz\,dz,$$

$$(m^2 - z^2)dq = \frac{-m^2q\,dz}{z}.$$

De la troisième on tire $q = \frac{b(m^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}$. Cette valeur substituée dans la première et la seconde, il vient, après

l'intégration,

$$y - e = -b(m^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x - c = -(1 - b^2)^{\frac{1}{2}}(m^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'élimination de b entre ces deux équations, conduit à l'intégrale cherchée que voici

$$(x - c)^2 + (y - e)^2 = m^2 - z^2,$$

l'équation d'une sphère dont le centre se trouve sur une courbe située dans le plan des xy, et qui a pour équation $e = \varphi(c)$.

En substituant dans l'équation $dz = pdx + qdy$, la valeur tirée de la troisième équation auxiliaire.....

$q = \dfrac{b(m^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}$, il vient

$$dz = \frac{(m^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}(1 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{z} dx + \frac{b(m^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}{z} dy,$$

ou

$$-\frac{zdz}{(m^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} = (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}.dx + bdy.$$

L'intégrale cherchée est, d'après le n° 87,

$$a - (m^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} = x(1 - b^2)^{\frac{1}{2}} + by.$$

Cette intégrale se déduit de celle qu'on a trouvée précédemment, de la même manière qu'il a été montré au premier exemple. Savoir, on a

$$(x - c)^2 + (y - e)^2 + z^2 - m^2 = U = 0,$$
$$x - c + \frac{de}{dc}(y - e) = \frac{dU}{dc} = 0.$$

Faisant, dans la seconde équation, $\dfrac{de}{dc} = \dfrac{-(1 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{b}$, multipliant cette équation par b, élevant les deux membres

ensuite au quarré, et retranchant le résultat de la première équation, on obtient, en extrayant la racine quarrée, et mettant $eb + c(1 - b^2)^{\frac{1}{2}} = a$, l'intégrale précédemment trouvée.

Quelle est l'équation de la surface enveloppante de la première intégrale pour $e = ac$?

Les intégrales trouvées ci-dessus expriment des surfaces dont la normale est constante, comme le fait voir l'équation différentielle proposée. (*Voyez* n° 78.)

Le lecteur s'exercera sur les exemples suivans, en cherchant les intégrales par la méthode précédente, et en examinant les surfaces exprimées par ces intégrales, ainsi que les surfaces enveloppantes, pour des valeurs particulières des constantes.

Exemple III. Soit $m^2qp = xy$. L'intégrale en est... $(x^2 - b^2)y^2 = m^2(z - c)^2$. Quelle est l'équation de la surface enveloppante pour $c = \frac{b^2}{n}$?

Une seconde intégrale est celle-ci :

$$z - d = \frac{ax^2}{2m^2} + \frac{y^2}{2a}.$$

Exemple IV. Soit $p^2 + q^2 = X^2$, où X est une fonction de x. Soit, par exemple, $X = mx^{\frac{1}{2}}$, $X = x$. Trouver la surface courbe de ces corps.

Exemple V. Soit $ap = qx + q^2y$.

Exemple VI. Soit $a^2pq = xz$.

Exemple VII. Soit $ap = (x + y)q$. Cette équation est aussi intégrable par le n° 100; il en est de même de celle-ci :

$$p - q = \frac{-x}{a}.$$

Exemple VIII. Soit $pq = xyz$.

APPENDICE.

NOTES ET SOLUTIONS (*).

N° 14.

(*Exemple III*). On trouve

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{-a}{2x^{\frac{3}{2}}}-\frac{bm}{x^2}\left(a+\frac{b}{x}\right)^{m-1}.$$

(*Exemple IV*). On a

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{3-x-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}.\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}-(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}.$$

N° 17.

Pour développer $y=\frac{1+x}{1-x}$ en série ordonnée suivant les puissances entières de x, on a

$$p=\frac{2}{(1-x)^2},\ q=\frac{4}{(1-x)^3},\ r=\frac{12}{(1-x)^4};\ldots.$$

donc, par le n° 16,

(*) Dans cet Appendice, on a eu principalement en vue de donner les solutions des problèmes que l'auteur a simplement énoncés, ou auxquels il n'a ajouté que quelques données. Le lecteur pourra consulter ces notes, après s'être exercé lui-même en résolvant les problèmes, pour comparer les résultats et les méthodes qu'on a suivies pour y parvenir. Les numéros, ainsi que les problèmes, exemples, etc., mis en parenthèse, renvoient aux numéros, problèmes, exemples, etc., du texte.

$$y = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots\ldots,$$

également comme on trouve par la simple division de $1 + x$ par $1 - x$. Le théorème de Taylor conduit (n° 17) à

$$\Delta y = \frac{2}{(1-x)^2}\,\Delta x + \frac{2}{(1-x)^3}\,\Delta x^2 + \ldots\ldots$$

Pour le développement de $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ on a

$$p = \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},\quad q = \frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},\quad r = \frac{-3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$s = \frac{-3-12x^2}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}},\quad t = \frac{-15x\,(3+4x^2)}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}};\ldots\ldots$$

d'où $y = 1 - \frac{x^2}{1.2} - \frac{3x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$

N° 31.

Pour exprimer la tangente par son arc, on a, d'après ce qui précède au texte,

$$y = \operatorname{tang} x,\ p = \frac{1}{\cos x^2},\ q = \frac{2.\sin x}{\cos x^3},\ r = \frac{2+4\sin x^2}{\cos x^4},$$

$$s = \frac{8\sin x}{\cos x^5}\,(2 + \sin x^2),$$

$$t = \frac{8}{\cos x^6}\,[2 + 11\sin x^2 + 2\sin x^4];\ \ldots.$$

donc, par le n° 16,

$$y = \operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.3.5.7} + \frac{62x^9}{3.3.5.7.9} + \ldots$$

En faisant usage de la même méthode pour le développement de cotang x, il arrive que chaque coefficient diffé-

rentiel devient $= \infty$ pour $x = 0$. Mais on obtiendra, à cause de cotang $x = \frac{1}{\text{tang}\, x}$, une série convenable si l'on divise l'unité par l'expression de tang x que nous venons de trouver. Au reste, on renvoie pour cela le lecteur à l'*Introductio in Analysin infi.*, par *Euler*, tom. II.

N° 37.

(*Exemple III*). En développant

$$\frac{\pi a^2}{z} \log \left[1 + 2z^2 + 2z\,(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

par le n° 21, on obtient

$$\frac{\pi a^2}{z}\left[z\left[2z + 2\,(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{z^2\left[2z + 2(1+z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3}{2} + \ldots\right],$$

par où l'on voit que z est le facteur commun.

(*Exemple VI*). En différentiant séparément le numérateur et le dénominateur de la fonction proposée, on trouve $\frac{4(1+x)^{\frac{1}{2}}}{-3}$, valeur qui, lorsque $x = 1$, devient... $= \frac{-4\sqrt{2}}{3}$, comme l'auteur trouve.

On parviendra au même résultat en mettant..... arc $(\cos = x) = t$, ou $x = \cos t$; la fonction proposée se change par là en $\frac{\sin t . \cos t - t}{(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}}$. En différentiant séparément le numérateur et le dénominateur, on obtient

$$\frac{\cos t^2 - \sin t^2 - 1}{\frac{3}{2}(1 - \cos t)^{\frac{1}{2}} \sin t} = \frac{(1-\cos t)^{\frac{1}{2}} . \left[-4\,(1 + \cos t)^{\frac{1}{2}}\right]}{3(1-\cos t)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où l'on voit que le facteur commun est $= (1 - \cos t)^{\frac{1}{2}}$, et que la vraie valeur, pour $x = 1$, est $= \frac{-4\sqrt{2}}{3}$.

N° 44.

Problème 6. Pour la valeur du minimum, on trouve, à cause de $x = \frac{ac}{b+a}$,

$$y = [c^2 + (a+b)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Si $a = b$, la fonction devient un minimum lorsque $x = \frac{c}{2}$; la valeur du minimum est alors

$$y = [c^2 + 4b^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Problème 9. Pour le maximum, on tire de $p = 0$, $x = m\left(\frac{2t}{3n}\right)^{\frac{1}{2}}$.

En n'ayant égard qu'à une des deux bases, il vient $x = 2m\left(\frac{t}{3n}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Pour l'*hexagone*, on obtient $x = \frac{m}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; pour le *triangle*, on trouve $x = \frac{m}{3}(2\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$.

En introduisant au lieu du côté de la base le rayon $= R$ du cercle circonscrit au polygone, on aura..... $R = \frac{x}{2t}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}$, et l'on trouvera par les valeurs de x

trouvées précédemment, que $R = m\left[\frac{1+t^2}{6nt}\right]^{\frac{1}{2}}$ répond au maximum.

Problème 10. Désignons comme au problème 9, le nombre des côtés par n, l'un des côtés de la base par x, la tang. trigon. de la moitié de l'angle au centre de la base, c'est-à-dire tang $\frac{180^\circ}{n}$, par t, on trouvera que la hauteur d'un des triangles du polygone est $= \frac{x}{2t}$; la base de la pyramide sera donc $= \frac{nx^2}{4t}$. En représentant maintenant par z la hauteur de la pyramide, par m^2 l'aire de sa surface, on obtiendra

$$m^2 = \frac{nx^2 + nx\,(4t^2z^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{4t},$$

d'où $z = \frac{m}{ntx}\,[4t^2m^2 - 2tnx^2]^{\frac{1}{2}}$;

on a donc, à cause que $y = \frac{nx^2z}{12t}$,

$$y = \frac{mx}{12t^2}\,[4t^2m^2 - 2ntx^2]^{\frac{1}{2}},$$

d'où
$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{m}{3t}\left[\frac{tm^2 - nx^2}{(4t^2m^2 - 2ntx^2)^{\frac{1}{2}}}\right],$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = q = \frac{2mn}{3}\left[\frac{nx^3 - 3tm^2x}{(4t^2m^2 - 2ntx^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

De $p = 0$, on tire $x = m\left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$, valeur pour laquelle la fonction y devient un maximum.

Problème 11. Soit r le rayon du cercle donné et par conséquent le côté du cône droit à chercher. En représentant par x l'arc du cercle donné qu'on doit ôter, on a le rayon de la base du cône cherché $= \frac{x}{2\pi}$; la hauteur du cône sera $= \frac{(4r^2\pi^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi}$, donc le volume du cône

$$y = \frac{x^2 (4r^2\pi^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{24\pi^2},$$

d'où $$\frac{dy}{dx} = p = \frac{1}{24\pi^2}\left[\frac{8\pi^2 r^2 x - 3x^3}{(4r^2\pi^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}\right];$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q = \frac{1}{12\pi^2}\left[\frac{16r^4\pi^4 - 18r^2\pi^2x^2 + 3x^4}{(4r^2\pi^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\right];$$

de $p = 0$, on tire $x = 0$ et $x = 2r\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$; la première valeur rend q positif, la dernière rend q négatif. Pour la valeur du maximum on obtient $y = \frac{2r^3\pi}{9.\sqrt{3}}$.

Si n^o désigne le nombre de degrés de l'arc à ôter, dont la longueur $= x$, on a la proportion suivante :

$$2r\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}} : 2r\pi = n^o : 360^o,$$

ou $\sqrt{\frac{2}{3}} : 1 = n^o : 360^o$, d'où $n^o = 293,9364^o \ldots$

N° 48.

Problème. L'équation générale de la section conique $y^2 = 2mx + nx^2$ donne

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{m + nx}{(2mx + nx^2)^{\frac{1}{2}}};$$

l'équation de la tangente est d'après cela

$$y-y'=\frac{m+nx'}{(2mx'+nx'^2)^{\frac{1}{2}}}(x-x'),$$

et celle de la normale

$$y-y'=\frac{(2mx'+nx'^2)^{\frac{1}{2}}}{-(m+nx')}(x-x').$$

N° 51.

Problème. L'équation générale de la section conique $y^2=2mx+nx^2$ donnant

$$p=\frac{m+nx}{(2mx+nx^2)^{\frac{1}{2}}},\quad q=\frac{-m^2}{(2mx+nx^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on obtient pour le rayon de courbure

$$r=\frac{[2mx+nx^2+(m+nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{-m^2}.$$

En désignant la normale de la section conique par a, on a $r=\frac{a^3}{-m^2}$.

Lorsque $x=0$, on a $r=-m$.

N° 54.

Problème 4. La courbe a un point d'inflexion pour $x=\frac{a}{4}$, où $y=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

La courbe s'étend depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, parce que si x est négatif et en même temps $>a$, y devient imaginaire.

L'ordonnée correspondante à $x=a$ est en même temps l'asymptote de la courbe. Depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{a}{4}$,

la courbe est concave, et depuis $x = \frac{a}{4}$ jusqu'à $x = a$, elle est convexe vers l'axe des abscisses. Lorsque $x = \frac{a}{2}$, où la tangente trigonométrique est $= 2$, y est $= a$; lorsque $x = 0$, on a $p = \frac{1}{\infty}$, et $y = 0$.

Problème 5. Si $x = a$, y aussi bien que p est infini, l'ordonnée est par conséquent dans ce point en même temps une asymptote. Si $x = -b$, on a $y = 0$, $p = \infty$; dans ce point la courbe coupe l'axe des abscisses. Si $x = 0$, on a $y = 0$, $p = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; il s'ensuit que la courbe coupe dans ce point l'axe des abscisses, et que les deux tangentes appartenant à ce point coupent l'axe des abscisses sous des angles égaux entre eux.

On voit d'ailleurs que la courbe s'étend depuis $x = -b$ jusqu'à $x = a$. Elle est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, comme l'équation primitive le fait voir. Elle est fermée entre $x = -b$ et $x = 0$; elle tourne, tant au-dessus qu'au-dessous, sa concavité vers l'axe des abscisses.

Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, elle est composée de deux branches infinies, qui ont la figure de la *cissoïde* (considérée au Problème 3 de ce numéro).

Si $b = a$, on a $y = x\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}$. On construira cette courbe par points, à l'aide de deux paraboles ordinaires, qui ont pour équations $(a+x)^{\frac{1}{2}} = y'$, $(a-x)^{\frac{1}{2}} = y''$, et dont les paramètres sont égaux à l'unité; d'ailleurs, ces deux paraboles sont opposées de position. En effet, on aura

$$x : y = y'' : y', \text{ d'où } y = \frac{xy'}{y''} = x\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}},$$

comme ci-dessus.

N° 56.

Problème 1. En rapportant l'équation $z = m \pm a.\cos t$, aux coordonnées rectangles, et mettant $z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, et $\cos t = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$, on obtient

$$x^4 + 2y^2x^2 - 2ax^3 + y^4 - 2axy^2 + a^2x^2 = m^2x^2 + m^2y^2,$$

d'où l'on tire dans la supposition de $m = a$,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a(4ax + a^2)^{\frac{1}{2}} - 2x^2 + 2ax + a^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Cette équation primitive montre d'abord que, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2a$, y a deux valeurs égales, mais de signe opposé; de plus que, pour $x = 2a$, y est $= 0$, et que pour $x > 2a$, y est imaginaire. On voit de plus que depuis $x = \frac{-a}{4}$ jusqu'à $x = 0$, y a quatre valeurs qui sont égales deux à deux. Pour les valeurs négatives de x, si $x > \frac{a}{4}$, y devient imaginaire. Lorsque $x = 0$, y a quatre valeurs, dont deux sont nulles, et deux égales à a, mais de signe opposé.

La valeur de

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{a^2 - (2x - a).(4ax + a^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\left[4a^2x + a^3 - (2x^2 - 2ax - a^2).(4ax + a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

devient nulle pour $x = 0$, et pour $x = \frac{3a}{4}$, ce qui montre

que les tangentes appartenant à ces points sont parallèles à l'axe des abscisses.

En faisant évanouir le dénominateur de p, on obtient les valeurs $x = \frac{-a}{4}$, et $x = 2a$; la tangente est donc perpendiculaire à l'axe des abscisses dans ces points.

La valeur de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q = -a\sqrt{2}\left\{\frac{2a^4+10a^3x+11a^2x^2+(4ax+a^2)^{\frac{1}{2}}\left[2a^3+ba^2x+3ax-2x^2\right]}{(4ax+a^2)^2\left[a(4ax+a^2)^{\frac{1}{2}}-2x^2+2ax+a^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right.$$

devient nulle pour $x = 0$. L'équation primitive indique, à ce que nous avons vu plus haut, du côté gauche de ce point, quatre ordonnées, et du côté droit seulement deux ordonnées, d'où l'on conclut (n° 49) qu'il y a pour $x = 0$, un *point de rebroussement*.

Si l'on a égard à la position opposée de z' et de z'', on aura au lieu de l'équation $(z - z').(z - z'') = 0$, celle qui suit :

$$(z - z').(z + z'') = 0, \quad \text{d'où} \quad z = a \cos t = m.$$

Problème 2. On rapportera l'équation $u = \frac{t}{2\pi}$ aux coordonnées rectangles, en mettant, d'après les formules au commencement de ce numéro,

$$u = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, t = \text{arc}\left(\cos = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right).$$

Ainsi la spirale d'Archimède a pour équation

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}.\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right).$$

En différentiant cette équation, on obtient

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.(x\,dx + y\,dy) = \frac{1}{2\pi}(x\,dy - y\,dx),$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{y + 2\pi x (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{x - 2\pi x (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Avec cette équation on déterminerait sans difficulté les valeurs de la soutangente, de la tangente, etc., en faisant usage des formules des nos 45 et 46; mais il sera plus simple de transformer ces formules relativement aux variables u et t; c'est ce que nous allons faire, par exemple, pour *la soutangente.*

On tire des valeurs de $x = u.\cos t$ et de $y = u \sin t$,

$$dx = du.\cos t - u.\sin t.dt, \quad dy = du.\sin t + u \cos t dt;$$

donc on a

$$\text{soutangente} = \frac{y}{p} = y.\frac{dx}{dy} = \frac{u.\sin t.\cos t.du - u^2.\sin t^2.dt}{\sin t.du + u.\cos t.dt}.$$

On voit par cette expression que, lorsque $t = 2\pi$, ou qu'après une révolution du rayon décrivant, la soutangente est nulle. Il faut que dans ce point la tangente soit perpendiculaire à l'axe des abscisses, ce qui a aussi lieu, lorsque $t = \pi$, $t = 3\pi$, etc.

N° 59.

Pour décomposer une fonction fractionnaire et rationnelle en fractions partielles, on fait ordinairement usage de la méthode des coefficiens indéterminés; mais il y a plusieurs procédés qui exigent moins de calcul. Voici en peu de mots celui d'Euler :

(1) Soit à décomposer en fractions partielles la fonction fractionnaire et rationnelle $\frac{U}{V}$, où $x - a$ soit un des facteurs inégaux du dénominateur V, en sorte qu'on ait

$$V = (x - a) Q.$$

En mettant

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{x-a}+\frac{P}{Q},\quad \text{d'où}\quad U-AQ=P(x-a),$$

où P est une fonction indéterminée, mais entière et rationnelle, par rapport à x, et A un des coefficiens à déterminer, il s'ensuit que $U-AQ$ est divisible par $x-a$, et que, lorsque $x-a=0$, on a $U-AQ=0$. On pourra donc par là déterminer A ; car il faut qu'on ait (en adoptant la manière d'écrire du n° 16)

$$A=\frac{U_{x=a}}{Q_{x=a}}.$$

Exemple I. Soit $\frac{U}{V}=\frac{2-x}{x(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}$; on tire de là

$$U-A(x-3)=Bx,\ \text{et}\ U-Bx=A(x-3).$$

Il faut donc que $U-A(x-3)$ soit divisible par x, et que $U-Bx$ le soit par $x-3$. On a ainsi

$$U_{x=0}+3A=0=2+3A,\quad U_{x=3}-3B=0=-1-3B;$$

d'où l'on tire $A=\frac{-2}{3}$, $B=\frac{-1}{3}$. Il viendra

$$\frac{U}{V}=\frac{2-x}{x(x-3)}=\frac{-2}{3x}+\frac{-1}{3.(x-3)}.$$

(2) Si le dénominateur V est composé de plusieurs facteurs égaux du premier degré, de sorte qu'on ait

$$\frac{U}{V}=\frac{U}{Q(x-a)^n},$$

on mettra

$$\frac{U}{V}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{B}{(x-a)^{n-1}}+\ldots\frac{N}{x-a}+\frac{P}{Q},$$

équation qui donne

$$(x-a)^n P = U - QA - Q[B(x-a) + C(x-a)^2 + \ldots N(x-a)^{n-1}] \ldots (1),$$

$$\text{et} \quad P = \frac{U - QA - Q[B(x-a) + C(x-a)^2 + \ldots N(x-a)^{n-1}]}{(x-a)^n} \ldots (2).$$

Puisque P est une fonction entière et rationnelle par rapport à x, il faut que le numérateur du second membre de l'équation (2) soit divisible n fois de suite par $x-a$. Ce numérateur s'évanouira donc, lorsqu'on y met $+a$ au lieu de x. On voit d'abord qu'il se réduit dans ce cas à $U - QA$, mais pour que $U - QA$ soit divisible par $x-a$, il faut qu'on ait $A = \frac{U_{x=a}}{Q_{x=a}}$. En substituant la valeur ainsi trouvée de A dans l'équation (1) et divisant ensuite cette équation par $x-a$, on aura, en désignant par U_1 le quotient trouvé $\frac{U - QA}{x-a}$, lequel sera nécessairement une fonction entière et rationnelle de x,

$$(x-a)^{n-1} P = U_1 - QB - Q[C(x-a) + \ldots N(x-a)^{n-2}],$$

$$\text{et} \quad P = \frac{U_1 - QB - Q[C(x-a) + \ldots N(x-a)^{n-2}]}{(x-a)^{n-1}}.$$

On déterminera, de la même manière B, et en procédant comme auparavant, c'est-à-dire en divisant par $x-a$ et désignant par U_2 le quotient de $\frac{U_1 - QB}{x-a}$, on sera en état de trouver le coefficient C, par l'équation $U_2 - QC = 0$, et ainsi de suite les autres coefficiens D, E, ... N.

Exemple 2. Soit $\frac{1+x}{x.(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{P}{x}$.

On a ici $U = 1 + x$, $a = 1$, $Q = x$, $n = 2$; donc.

$$A = \frac{(1+x)_{x=1}}{x_{x=1}} = 2, \text{ d'où } U_1 = -1;$$

de là

$$B = \frac{U_{1\,x=1}}{Q_{x=1}} = -1, \quad P = 1.$$

Il vient ainsi

$$\frac{1+x}{x(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}.$$

(3) Si V est composé de facteurs inégaux du second degré, en sorte qu'on ait

$$\frac{U}{V} = \frac{U}{Q(x^2+ax+b)},$$

on mettra

$$\frac{U}{V} = \frac{Ax+B}{x^2+ax+b} + \frac{P}{Q},$$

ce qui donne

$$U - Q(Ax+B) = P(x^2+ax+b).$$

Il est visible que

$$U - Q(Ax+B) = 0, \quad \text{lorsque} \quad x^2+ax+b = 0.$$

Désignons les deux valeurs de x qui réduisent l'expression x^2+ax+b à zéro, par m et n, on aura, par conséquent en même temps

$$Am + B = \frac{U_{x=m}}{Q_{x=m}}, \quad \text{et} \quad An + B = \frac{U_{x=n}}{Q_{x=n}},$$

deux équations qui suffisent pour la détermination des coefficiens A et B.

Exemple 3. Soit $\frac{x+1}{x.(x^2-3x+2)}=\frac{Ax+B}{x^2-3x+2}+\frac{P}{x}$.

On a ici $U=x+1$, $m=1$, $n=2$, $Q=x$;

donc $A.1+B=\frac{(x+1)_{x=1}}{x_{x=1}}=2$, et $A.2+B=\frac{(x+1)_{x=2}}{x_{x=2}}=\frac{3}{2}$,

équations d'où l'on tire

$$A=\frac{-1}{2},\quad B=\frac{5}{2}.$$

On trouve ainsi

$$\frac{x+1}{x.(x^2-3x+2)}=\frac{-x+5}{2(x^2-3x+2)}+\frac{1}{2x}.$$

(4) En appliquant ce que nous venons d'exposer, au cas où V est composé de plusieurs facteurs égaux du second degré, on aura, en mettant pour abréger, $x^2+ax+b=R$,

$$\frac{U}{Q.(x^2+ax+b)^n}=\frac{Ax+B}{R^n}+\frac{Cx+D}{R^{n-1}}+\ldots\frac{Mx+N}{R}+\frac{P}{Q},$$

d'où

$$P=\frac{U-Q(Ax+B)-Q[(Cx+D)R+\ldots.(Mx+N)R^{n-1}]}{R^n}\ldots.(3).$$

En raisonnant dans ce cas comme dans les précédens, on conclura que le numérateur de cette expression s'évanouira dans l'hypothèse de $R=x^2+ax\,b=0$. Ayant trouvé les deux racines de x qui satisfont à l'équation $R=0$, on les substituera successivement à x dans l'équation..... $U-Q(Ax+B)=0$; on obtiendra par là deux équations pour en déterminer les coefficiens A et B. En divisant ensuite le numérateur et le dénominateur du second membre de l'équation (3) par R, et désignant le quotient....

$\frac{U - Q(Ax + B)}{R_1}$ par U_1, et raisonnant alors comme auparavant, on tombera sur l'équation $U_1 - Q(Cx + D) = 0$ qui servira pour la détermination des coefficiens C et D, et en continuant de la sorte, on sera en état de déterminer les autres coefficiens E, F,....

Exemple 4. Soit

$$\frac{x+1}{x.(x^2-3x+2)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2-3x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-3x+2} + \frac{P}{x}.$$

On a ici $U = x + 1$, $n = 2$, $Q = x$; les deux racines de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$, sont $+1$, $+2$.

On a donc, d'après ce qui précède,

$$A.1 + B = 2,\ A.2 + B = \frac{3}{2},\ \text{d'où}\ A = \frac{-1}{2},\ B = \frac{5}{2}.$$

$$U_1 = \frac{U - Q(Ax+B)}{R}\ \text{étant ici}\ = \frac{1}{2},$$

on a

$$C.1 + D = \frac{1}{2},\ C.2 + D = \frac{1}{4},\ \text{d'où}\ C = \frac{-1}{4},\ D = \frac{3}{4}.$$

Enfin, on a $P = \frac{1}{4}$. On obtient ainsi

$$\frac{x+1}{x.(x^2-3x+2)^2} = \frac{-x+5}{2(x^2-3x+2)^2} + \frac{-x+3}{4(x^2-3x+2)} + \frac{1}{4x}.$$

Le calcul différentiel facilite beaucoup les opérations précédentes. En effet, si l'on différentie successivement $n - 1$ fois l'équation

$$U = Q[A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \ldots N(x-a)^{n-1}] + P(x-a)^n,$$

et qu'on fasse ensuite $x - a = 0$ dans cette équation et dans celles qu'on en aura déduites, il viendra

$$\begin{aligned} U &= AQ, \\ dU &= AdQ + BQdx, \\ d^2U &= Ad^2Q + 2BdQdx + 2CQdx^2, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

équations qui déterminent chacun des coefficiens A, B, C..., par ceux qui le précèdent; bien entendu qu'il faudra écrire après la différentiation a au lieu de x.

Dans le cas qu'on eût l'équation

$$U = Q[Ax + B + (Cx + D)R + \ldots (Nx + M)R^{n-1}] + PR^n,$$

il viendrait, dans la même hypothèse,

$$\begin{aligned} U &= (Ax + B)Q, \\ dU &= (Ax + B)dQ + AQdx + (Cx + D)QdR, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

équations, dont chacune deviendra double, lorsqu'on mettra pour x successivement les deux valeurs qui satisfont à l'équation $R = 0$.

Reprenons, pour l'application de ce qui a été dit, notre exemple 4,

$$\frac{1 + x}{x.(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 - 3x + 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 3x + 2} + \frac{P}{x}.$$

On a $U = 1 + x = (Ax + B)x$, d'où l'on tire $A = \frac{-1}{2}$, $B = \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} d.(1+x) &= \left(\frac{-x}{2} + \frac{5}{2}\right)dx - \frac{x}{2}dx + (Cx + D).x.d.(x^2 - 3x + 2) \\ &= -xdx + \frac{5}{2}dx + (Cx^2 + Dx).(2x - 3)dx; \end{aligned}$$

en y substituant d'abord la valeur de $x = +1$, et ensuite celle de $x = +2$, on obtient successivement

$$1 = -1 + \frac{5}{2} + (C + D).(2 - 3),$$

et $$1 = -2 + \frac{5}{2} + (C.4 + D.2).(4 - 3),$$

d'où l'on tire $C = \frac{-1}{4}$, $D = \frac{3}{4}$.

N° 61.

(*Exemple II.*) On a

$$\int \frac{(x^3-1)dx}{x^2+2} = \int x dx - \int \frac{2x dx}{x^2+2} - \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{x^2}{2} - \log(x^2+2)$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

(*Exemple III.*) On a

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x-2).(x^2+1)} = \int \frac{dx}{5(x-2)} + \int \frac{(3-x)\,dx}{5(x^2+1)}$$
$$= \frac{1}{5} \log\left[\frac{x-2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right] + \frac{3}{5} \text{arc}(\text{tang} = x) + C.$$

N° 62.

(*Exemple II.*) Pour rendre rationnelle l'intégrale.... $\int x^4 dx\,(a + bx^3)^{\frac{1}{3}}$, on mettra $a + bx^3 = x^3 z^3$, par où l'intégrale se change, en posant en même temps $b = c^3$, en

$$-a^2 \int \frac{z^3 dz}{(z^3 - c^3)^3} = -a^2 \int \frac{z^3 dz}{(z-c)^3.(z^2+cz+c^2)^3}.$$

Pour intégrer cette expression, il faut la décomposer en fractions partielles; en faisant usage, pour cela, de la méthode enseignée dans la note sur le n° 59, on trouvera

$$-a^2\int\frac{z^3dz}{(z-c)(z^2+cz+c^2)^3}=-a^2\int\frac{dz}{27c^3(z-c)^3}$$
$$+a^2\int\frac{dz}{27c^5(z-c)}+a^2\int\frac{(2z+c)dz}{9c(z^2+cz+c^2)^3}$$
$$-a^2\int\frac{(2z+c)dz}{27c^3(z^2+cz+c^2)^2}-a^2\int\frac{(z-c)dz}{27c^5(z^2+cz+c^2)},$$

expression dont les termes s'intégreront au moyen des formules du n° 60.

Pour intégrer $Xdx\left(\frac{a+bx}{a'+b'x}\right)^{\frac{m}{n}}$, on mettra

$$\frac{a+bx}{a'+b'x}=z^n,\text{ d'où } x=\frac{a'z^n-a}{b-b'z^n},\ dx=\frac{n(a'b-ab')z^{n-1}dz}{(b-b'z^n)^2}.$$

La fonction rationnelle X est changée par là en une fonction rationnelle de $\frac{a'z^n-a}{b-b'z^n}$, c'est-à-dire en une fonction rationnelle de z, que nous désignerons par Z. Donc, au lieu de la fonction proposée, on aura à intégrer

$$\frac{nZdz.z^{m+n-1}(a'b-ab')}{(b-b'z^n)^2}.$$

Si, dans la différentielle proposée $\frac{Xdx}{(a+bx)^{\frac{n}{n}}-(a+bx)^{\frac{m'}{m'}}}$,

on fait $a+bx=z^{\frac{nn'}{mm'}}$, on obtient $x=\frac{1}{b}(z^{\frac{nn'}{mm'}}-a)$; de là

$$dx=\frac{1}{b}.\frac{nn'}{mm'}z^{\frac{nn'}{mm'}-1}.dz;$$

ainsi on a à intégrer,

$$Z.\frac{nn'z^{\frac{nn'}{mm'}-1}dz}{bmm'(z^{\frac{n'}{m'}}-z^{\frac{n}{m}})},$$

où Z est une fonction rationnelle de z.

(*Exemple III.*) En faisant $1+x=z^6$, on aura à intégrer, au lieu de la fonction proposée

$$\frac{6z^4(z^3-1)^3dz}{(1+z^3)^6}=-6z^3.(z^6-1).(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)dz,$$

expression qui conduit à des intégrales algébriques.

(*Exemple IV.*) La substitution $\frac{1+x}{1-x}=z^3$, donne

$$\frac{6z^4(z^3-1)^3dz}{(1+z^3)^5}=\frac{(6z^{13}-18z^{10}+18z^7-6z^4)dz}{(1+z^3)^5}.$$

Puisque $(1+z^3)^5=(z+1)^5.(z^2-z+1)^5$, la méthode pour décomposer une fonction fractionnaire en fractions partielles s'appliquera à cette différentielle, et on sera ensuite en état de parvenir à l'intégrale.

(*Exemple V.*) La substitution $1+2x=z^3$ conduit à l'intégrale

$$\frac{3}{4}(1+2x)^{\frac{4}{3}}.\left(\frac{2x}{7}-\frac{3}{28}\right)+C.$$

(*Exemple VI.*) On mettra $1+x^2=z^2$, l'intégrale est $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C$.

(*Exemple VII.*) La substitution $1-x^2=z^2$ conduit à l'intégrale $-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$.

N° 63.

(*Exemple IV.*) En mettant $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=xz$, d'où $\frac{dx}{x}=\frac{zdz}{1-z^2}$, on a

$$\int\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx}{2x^2}=\int\frac{z^2dz}{2(1-z^2)}=-\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-1}$$

$$=-\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{4}\log\left[\frac{z-1}{z+1}\right]=\frac{-z}{2}-\tfrac{1}{4}\log\left[\frac{(z-1)^2}{z^2-1}\right]$$

$$=-\tfrac{1}{2}\log\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-x\right]-\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{2x}+C.$$

(*Exemple V.*) On obtient, pour l'intégrale,

$$\tfrac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

N° 64.

(*Exemple IV.*) On obtient, pour l'intégrale,

$$\frac{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2x}+\tfrac{1}{2}\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\right)=\tfrac{1}{2}\text{ arc }(\cos=x)$$

$$-\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2x}+C.$$

(*Exemple V.*) On obtient, pour l'intégrale,

$$\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{a}\right)+C.$$

(*Exemple VI*). La multiplication indiquée au texte change l'intégrale proposée en

$$\int\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}dx}{2x}+\int\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}dx}{2x}.$$

Faisant dans la première intégrale $(1+x)^{\frac{1}{2}}=z$, d'où $x=z^2-1$, $dx=2zdz$, on a

$$\int \frac{z^2 dz}{z^2 - 1} = \int dz - \tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{z+1} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{z-1}$$

$$= (1+x)^{\frac{1}{2}} + \log\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{1}{2}}}\right].$$

En mettant, dans la seconde intégrale, $(1-x)^{\frac{1}{2}} = z'$, on a

$$\int \frac{z'^2 dz'}{z'^2 - 1} = \int dz' - \tfrac{1}{2}\int \frac{dz'}{z'+1} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dz'}{z'-1}$$

$$= (1-x)^{\frac{1}{2}} + \log\left[\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{1}{2}}}\right].$$

On trouve donc enfin

$$\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}} = (1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \log\left\{\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1\right].\left[(1-x)^{\frac{1}{2}} - 1\right]}{x}\right\}$$

$$= (1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} + \log\left[\frac{1-(1+x)^{\frac{1}{2}}}{1+(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right] + C.$$

(*Exemple VII*). On obtient, pour l'intégrale,

$$\frac{1}{2}\left\{\text{arc}(\cos = x) + \log\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x\right] - \left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\right]\right\} + C.$$

N° 65.

En donnant dans l'intégrale proposée $\int \frac{x^n dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ à n différentes valeurs, on aura, en commençant par les nombres

impairs,

$$\int\frac{x^3dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1.2}{1.3}\right)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C,$$

$$\int\frac{x^5dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\left(\frac{1}{5}x^4+\frac{1.4}{3.5}x^2+\frac{1.2.4}{1.3.5}\right)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C,$$

$$\int\frac{x^7dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\left(\frac{1}{7}x^6+\frac{1.6}{5.7}x^4+\frac{1.4.6}{3.5.7}x^2+\frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}\right)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$+C, \text{ etc.}$$

Passant aux valeurs paires de n, on trouve, en désignant pour abréger, arc (sin $=x$) par A,

$$\int\frac{x^2dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}A+C,$$

$$\int\frac{x^4dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1.3}{2.4}x\right)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1.3}{2.4}A+C,$$

$$\int\frac{x^6dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1.5}{4.6}x^3+\frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1.3.5}{2.4.6}A$$
$$+C, \text{ etc.}$$

Si n est négative, on aura, en commençant par les nombres impairs,

$$\int\frac{dx}{x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int\frac{dx}{x^5(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{4x^4}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int\frac{dx}{x^7(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{6x^6}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x^5(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

etc.

Enfin, en supposant que n soit négative et un nombre pair, on aura

$$\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^4(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int \frac{dx}{x^6(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{5x^5} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^4(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

etc.

(*Exemple*, *page* 147.) On trouve par la formule (C)

$$\int x^{-4}dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{-x^{-3}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{3} + \frac{2}{3}\int x^{-2}dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}};$$

Le dernier terme donne, par la formule (C),

$$\frac{2}{3}\int x^{-2}dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}x^{-1}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}\int dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Par la formule (B), on trouve

$$\frac{8}{3}\int dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + 2\int (1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx,$$

au moyen du n° 63, on obtient

$$2\int dx(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \log\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x\right].$$

Enfin, en réunissant tous les termes, on obtient,

$$\int x^{-4}dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{-(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{3x^3} - \frac{2(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{3x} + \frac{2x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$
$$+ x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \log\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x\right] + C.$$

N° 66.

(*Exemple.*) En faisant, dans l'expression

$$\int dz\left(a-\frac{b^2}{4c}+cz^2\right)^{\frac{5}{2}},\quad a-\frac{b^2}{4c}=a',$$

on obtient, par la formule (B),

$$\left(\frac{3}{8}a'z+\frac{cz^3}{b}\right).(a'+cz^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{8}a'^2\int dz(a'+cz^2)^{\frac{1}{2}},$$

où le dernier terme s'intégrera au moyen du n° 63.

N° 67.

(*Exemple II.*) On trouve, en développant $\frac{1}{(a+x)^{\frac{1}{2}}}$ en série (n° 16),

$$\frac{1}{(a+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}-\frac{x}{2a^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.3.x^2}{2^2.2a^{\frac{5}{2}}}-\frac{1.3.5.x^3}{2^3.2.3.a^{\frac{7}{2}}}+\ldots;$$

on a donc

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.(a+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}\int\frac{xdx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{1.3}{8a^{\frac{5}{2}}}\int\frac{x^2dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}-\ldots,$$

les termes du second membre s'intégreront à l'aide de la note sur le n° 65, où nous avons traité la formule..... $\int\frac{x^ndx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

L'expression $\frac{dx}{1+x^2}$ se change, par la simple division, en

$$dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + \ldots,$$

d'où

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \text{arc}(\text{tang} = x).$$

N° 68.

Si dans la formule $\int Pa^x dx$ on suppose $P = \frac{1}{x^n}$, on a

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = \int \frac{dx}{x^n} + \log a \int \frac{dx}{x^{n-1}} + \frac{(\log a)^2}{1.2} \int \frac{dx}{x^{n-2}} + \ldots$$
$$= \frac{x^{1-n}}{1-n} + \frac{(\log a) x^{2-n}}{2-n} + \frac{(\log a)^2 x^{3-n}}{1.2.(3-n)} + \ldots + C.$$

Si dans la même formule on suppose $P = \frac{x}{1+x}$, on [redacted]

$\int \frac{x \cdot a^x dx}{1+x}$. En y faisant $x + 1 = z$, d'où $x = z - 1$ e[redacted]

$dx = dz$, l'intégrale proposée se change en

$$\frac{1}{a}\int \frac{(z-1)\, a^z dz}{z} = \frac{1}{a}\int a^z dz - \frac{1}{a}\int \frac{a^z dz}{z}.$$

Le premier terme du second membre donne $\frac{a^z}{a.\log a}$

(n° 18) ; le second terme est traité au commencement d[redacted]

n° 68.

N° 71.

(*Exemple III.*) Pour intégrer $\frac{dx.\sin x^2}{\cos x^2}$, on mettra...

$\sin x = z$, d'où $x = \text{arc}(\sin = z)$, et $dx = \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$. On

a donc

$$\int \frac{dz.z^4}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} = (\text{n}^\circ\ 65)\ \frac{z^3}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2} z(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{3}{2}.\text{arc}\,(\sin = z) + \text{C},$$

ou en remettant z en x,

$$\int \frac{\sin x^4 dx}{\cos x^2} = \frac{\sin x^3}{\cos x} + \frac{3}{2} \sin x.\cos x - \frac{3}{2} x + \text{C}.$$

N° 73.

(*Exemple IV.*) En opérant sur la section conique en général, qui a pour équation $y^2 = 2ax + bx^2$, de la même manière que l'auteur a opéré dans cet exemple sur la parabole, on obtient, si fig. 9 est supposée représenter la section conique en général,

$$\text{OK} = \frac{a + bx' + (a^2 + bc^2 x'^2 + 2ac^2 x')^{\frac{1}{2}}}{cm - bn},$$

$$\text{OL} = \frac{-(a + bx') + (a^2 + bc^2 x'^2 + 2ac^2 x')^{\frac{1}{2}}}{cm - bn};$$

on a de là

$$\text{l'aire AKOA} = \frac{c}{2(c^2-b)}\ (2ax' + bx'^2)$$
$$+ \frac{c^2}{2(c^2-b)}\left(x' + \frac{a}{b}\right).\left(\frac{a^2}{c^2} + 2ax' + bx'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{a^2\sqrt{-1}}{2b^{\frac{3}{2}}}\ \text{arc}\left(\sin = \frac{c(a+bx')}{a(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right) + \text{C}\ldots \quad (1),$$

$$\text{l'aire ALOA} = \frac{-c}{2(c^2-b)}\ (2ax' + bx'^2)$$
$$+ \frac{c^2}{2(c^2-b)}\left(x' + \frac{a}{b}\right).\left(\frac{a^2}{c^2} + 2ax' + bx'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{a^2\sqrt{-1}}{2b^{\frac{3}{2}}}\ \text{arc}\left(\sin = \frac{c(a+bx')}{a(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right) + \text{C}'\ldots \quad (2)$$

Pour déterminer les constantes C et C′, on observera que lorsque $x' = 0$, l'aire ALOA est $= 0$, puisque la valeur appartenante de y' est $= 0$. Donc, on a

$$0 = \frac{a^2c}{2b(c^2-b)} + \frac{a^2\sqrt{-1}}{2b^{\frac{3}{2}}}.\text{arc}\left[\sin = \frac{c}{(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right] + C'.$$

Mais la seconde valeur de y' pour $x' = 0$ qui appartient à l'aire AKOA est $= \frac{2a}{cm - bn}$; on a donc pour ce point, en vertu de $x = x' + y'n$, $x = \frac{2an}{cm - bn}$. En substituant cette valeur de x dans l'intégrale définie de l'aire de la section conique rapportée au commencement de ce numéro, exemple 2, on trouvera la valeur de l'aire AMPA. En en retranchant celle du triangle APM $= \frac{x'^2c}{2}$, on trouvera la valeur de l'aire AKOA pour $x' = 0$, c'est-à-dire la valeur de l'aire AGM. On obtient ainsi

$$\text{l'aire AKOA}_{x'=0} = \frac{a^2c}{b(c^2-b)} - \frac{a^2\sqrt{-1}}{2b^{\frac{1}{2}}}$$
$$\times \text{arc}\left[\sin = \frac{2b^{\frac{1}{2}}c}{\sqrt{-1}(b-c^2)}\right]$$
$$= \frac{a^2c}{2b(c^2-b)} + \frac{a^2\sqrt{-1}}{2b^{\frac{3}{2}}}$$
$$\times \text{arc}\left[\sin = \frac{c}{(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right] + C.$$

En substituant les valeurs de C et C′ dans les équations (1) et (2), on trouve, en ajoutant les deux résultats l'un à l'autre, l'aire entière

$$\text{KLAK} = \frac{c^2}{c^2-b}\left(x'+\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{c^2}+2ax'+bx'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{a^2\sqrt{-1}}{b^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc}\left[\sin=\frac{c(a+bx')}{a(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$-\frac{a^2\sqrt{-1}}{b^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc}\left[\sin=\frac{c}{(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$-\frac{a^2\sqrt{-1}}{2b^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc}\left[\sin=\frac{2b^{\frac{1}{2}}c}{\sqrt{-1}(b-c^2)}\right];$$

or, on a

$$\frac{1}{2}\,\text{arc}\left[\sin=\frac{2b^{\frac{1}{2}}c}{\sqrt{-1}(b-c^2)}\right]=\text{arc}\left[\sin=\frac{b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

de plus,

$$\text{arc}\left[\sin=\frac{c}{(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right]+\text{arc}\left[\sin=\frac{b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}{(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right]=\frac{\pi}{2}$$

et

$$\text{arc}\left[\sin=\frac{c(a+bx')}{a(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right]-\frac{\pi}{2}=-\text{arc}\left[\cos=\frac{c(a+bx')}{a(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

On a donc

$$\text{l'aire KLAK} = \frac{c^2}{c^2-b}\left(x'+\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{c^2}+2ax'+bx'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{a^2\sqrt{-1}}{b^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc}\left[\cos=\frac{c(a+bx')}{a(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

ou

$$\text{l'aire KLAK} = S^2$$

$$=\frac{\dfrac{c(a+bx')}{(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\left[\dfrac{c^2(a+bx')^2}{c^2-b}-a^2\right]^{\frac{1}{2}}-a^2\sqrt{-1}\,.\,\text{arc}\left(\cos=\dfrac{c(a+bx')}{a(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right)}{b^{\frac{3}{2}}}\ldots(3).$$

Cette expression devient $\frac{0}{0}$, lorsque $b=0$, où elle appartient à la parabole. Voici comment on trouvera alors sa vraie valeur. On mettra, pour abréger, $\frac{c(a+bx')}{(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}=z$,

d'où l'on tire $b=\frac{-u^2+[u^4+4c^4x'^2(z^2-a^2)]^{\frac{1}{2}}}{2c^2x'^2}$, où $u^2=2ac^2x'+z^2$. En substituant ces valeurs dans (3), développant le radical dans la valeur de b, au moyen du n° 16, remplaçant arc.cos, par arc.sin, et exprimant ensuite arc sin, par la série du n° 31, on obtient

$$\frac{\left\{z(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-a^2\sqrt{-1}\left[\frac{-\sqrt{-1}}{a}(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{-1}(z^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3\ 1.2.3}-\ldots\right]\right\}^{\frac{2}{3}}}{\frac{c'(z^2-a^2)}{u^2}-\frac{c^4(z^2-a^2)^2}{2u^6}+\ldots}=S^{\frac{4}{3}},$$

ou

$$\frac{\left[(z-a)^{\frac{3}{2}}.(z+a)^{\frac{1}{2}}+\frac{(z-a)^{\frac{3}{2}}.(z+a)^{\frac{3}{2}}}{1.2.3.a}-\ldots\right]^{\frac{2}{3}}}{\frac{c^2}{u^2}(z-a)\left[z+a-\frac{c^2(z-a).(z+a)^2}{2u^4}+\ldots\right]}=S^{\frac{4}{3}}.$$

En divisant le premier membre au numérateur et au dénominateur par $z-a$, et mettant ensuite $z=a$, valeur qui répond à celle $b=0$, il vient

$$\frac{4^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}.(2c^2x'+a)}{3^{\frac{2}{3}}.2.c^2}=S^{\frac{4}{3}} \text{ ou } \frac{4.(2a)^{\frac{1}{3}}.\left(x'+\frac{a}{2c^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{3}=S^2,$$

comme l'auteur a trouvé dans cet exemple.

N° 74.

(*Exemple VI.*) L'aire de la cissoïde, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=r$, est $=\frac{3r^2\pi}{2}-2r^2$; depuis $x=0$ jusqu'à $x=2r$ elle est $=\frac{3r^2\pi}{2}$.

N° 75.

(*Exemple II.*) Pour la longueur de l'arc de l'hyperbole, pris depuis $x=1$ jusqu'à $x=x'$, on obtient, en observant que pour $x=1$, arc(sin $=x$) est $=\frac{\pi}{2}$, par le n° 67, exemple 1, l'expression suivante :

$$-\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3e^4}{2^2.4^2}-\ldots\ldots\right)+\text{arc}(\sin=x')$$
$$+\frac{e^2}{2}\left[\frac{x'}{2}(1-x'^2)^{\frac{1}{2}}-\text{arc}(\sin=x')\right]+\ldots.$$

(*Remarque.*) Pour l'aire de la cardioïde on a (n° 56, problème 1)

$$\frac{1}{2}\int\frac{z^2dz}{(2az-z^2)^2}=\frac{3a^2}{4}\text{arc}\left(\sin=\frac{z-a}{a}\right)$$
$$-\frac{(3a+z)}{4}.(2az-z^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

En faisant dans cette intégrale successivement $z=0$ et $z=2a$, on obtient pour l'aire prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=2a$, comme au texte, $\frac{3a^2\pi}{4}$.

Pour la rectification de la cardioïde, on a (*voyez* n° 56, problème 1)

$$(2a)^{\frac{1}{2}}\int\frac{dz}{(2a-z)^{\frac{1}{2}}}=-2.(2a)^{\frac{1}{2}}.(2a-z)^{\frac{1}{2}}+C,$$

intégrale qui prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=2a$, donne pour la longueur de l'arc, $4a$.

Pour réduire ces valeurs aux coordonnées rectangulaires, on n'a qu'à mettre

$$z=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{a(4ax+a^2)^{\frac{1}{2}}+2ax+a^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En comparant les aires de la *cycloïde*, de la *cissoïde* et de la *cardioïde*, on trouve, si les cercles générateurs (*voyez* n° 53, probl. 3; n° 54, probl. 7; n° 56, probl. 1) sont supposés être d'un même rayon, que ces aires sont respectivement entre elles, comme 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$.

(*Problème*). L'équation de la spirale d'Archimède (n° 56, problème 2) étant $u=\frac{t}{2\pi}$, on trouve, pour la différentielle de l'aire en coordonnées polaires, $\frac{u^2dt}{2}$, donc pour l'aire

$$\int\frac{t^2dt}{8\pi^2}=\frac{t^3}{24\pi^2}+C.$$

L'aire prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=2\pi$ est, d'après cela $=\frac{\pi}{3}$.

N° 76.

(*Exemple III.*) Si $z=\frac{x}{y^{\frac{1}{2}}}-y^{\frac{1}{2}}$, on a

$$\frac{dz}{dx}=p=\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{dz}{dy}=q=\frac{-(x+y)}{2.y^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2z}{dx} = \frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{dq}{dy} = \frac{3x+y}{4.y^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2z}{dx.dy} = \frac{d^2z}{dy.dx} = \frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dy} = \frac{-1}{2.y^{\frac{3}{2}}},$$

etc.

N° 80.

(*Exemple II.*) La supposition de $a = b = r$, change l'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 = r^3$ en $x^2 + y^2 + \frac{c}{r}z^2 = r^2$, les sections principales donnent alors dans le plan des yz et dans celui des xz des ellipses, mais dans celui des xy un cercle.

La section parallèle au plan des zy à la hauteur indéterminée $x = x'$ donne une ellipse dont les demi-axes sont $\left(\frac{r}{c}\right)^{\frac{1}{2}}.(r^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}}$ et $(r^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}}$; celle qui est parallèle au plan des xz à la hauteur indéterminée $y = y'$ donne une ellipse dont les demi-axes sont $\left(\frac{r}{c}\right)^{\frac{1}{2}}.(r^2 - y'^2)^{\frac{1}{2}}$ et $(r^2 - y'^2)^{\frac{1}{2}}$; la section parallèle au plan des xy à la hauteur indéterminée $z = z'$ donne un cercle du rayon $= \left(r^2 - \frac{c}{r}z'^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Pour le volume de ce solide, on trouve

$$\pi r^2 z - \frac{\pi c z^3}{3r} + C,$$

intégrale qui donne, en la prenant depuis $z = +\left(\frac{r^3}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$ jusqu'à $z = -\left(\frac{r^3}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{4\pi r^{\frac{7}{2}}}{3.c^{\frac{1}{2}}}$. Les trois axes de ce solide sont respectivement $r, r, \left(\frac{r^3}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$.

N° 81.

(*Problème* 1.) Le solide engendré par la rotation de la parabole ordinaire, a pour équation,

$$x^2 + y^2 = pz,$$

équation d'un paraboloïde. Le volume de ce solide est

$$\pi \int pz\,dz = \frac{\pi p z^2}{2} + C,$$

intégrale qui, prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = z'$, donne $\frac{\pi p z'^2}{2}$. Le volume d'un cylindre à la même base et hauteur étant $= \pi p z'^2$, on voit que le corps considéré en est la moitié.

Si $b = a$, l'équation de l'hyperboloïde se change en $x^2 + y^2 - 2az - z^2 = 0$, ou en faisant $z = t - a$, en $x^2 + y^2 - t^2 + a^2 = 0$. Le volume de ce solide sera, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = z'$, $\frac{\pi z'^2}{3}(z' + 3a)$.

Le volume du corps de révolution engendré par la courbe qui a pour équation $r^2u^2 = r^2z^2 - z^4$, est

$$= \frac{\pi}{r^2}\int (r^2z^2 - z^4)\,dz = \pi z^3\left(\frac{1}{3} - \frac{z^2}{5r^2}\right) + C,$$

intégrale qui donne, en la prenant, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = r$, $\frac{2r^3\pi}{15}$.

(*Problème* 2.) On obtient, en vertu de $u = \frac{z^2}{p}$, pour

l'équation du corps de révolution,

$$p^2x^2 + p^2y^2 = z^4.$$

Son volume est $\pi\int\frac{z^4}{p^2}dz = \frac{\pi z^5}{5p^2} + C$, et par conséquent, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = z'$, égal à $\frac{\pi z'^5}{5p^2}$. Le cylindre que l'auteur propose de comparer avec ce solide, et qui a pour base $\frac{\pi z^4}{p^2}$, et pour hauteur z, est par conséquent cinq fois plus grand que le corps considéré.

Pour trouver les mêmes choses dans le cercle, l'ellipse et l'hyperbole, considérons la section conique en général qui a pour équation

$$z^2 = 2mu + nu^2.$$

On a alors

$$u = \frac{(nz^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} - m}{n},$$

l'équation du corps de révolution correspondant est donc

$$n(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = (nz^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} - m,$$

d'où l'on tire, pour le volume de ce corps,

$$\frac{\pi}{n^2}\int dz[nz^2 + 2m^2 - 2m(nz^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{\pi}{n^2}\left[\frac{nz^3}{3} + 2m^2z - mz(nz^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{\pi m^3}{n^2\sqrt{n}}\log[(nz^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{n}.z] + C.$$

En supposant que le volume soit $= 0$, lorsque $z = 0$, on a $C = \frac{-m^3\pi\log m}{n^{\frac{5}{2}}}$.

(*Problème* 3). On a ici $u = h + r + (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$. En y faisant $h + r = a$, on trouve que le corps engendré a pour équation

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = a + (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour le volume de ce solide, on a

$$\pi \int dz \left[a^2 + r^2 - z^2 + 2a(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \pi(a^2 + r^2)z - \frac{\pi z^3}{3}$$
$$+ \pi a z (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} + \pi a r^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{z}{r}\right) + C.$$

En supposant qu'une parabole ordinaire, dont l'équation

$$z^2 = 2mu,$$

se tourne autour d'une droite parallèle à l'axe des z et qui passe par un point pris dans l'axe des abscisses, à la distance h au sommet, on aura, d'après ce qui précède, pour l'équation du corps de rotation engendré de cette manière,

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{z^2}{2m} + h,$$

et pour le volume du solide

$$\pi \int \left(\frac{z^2 + 2mh}{2m}\right)^2 dz = \frac{\pi z^5}{20 m^2} + \frac{\pi h z^3}{3m} + \pi h^2 z + C.$$

Dans la même hypothèse, on trouverait pour l'hyperbole et l'ellipse dont l'équation $z^2 = 2mu \pm nu^2$, que le corps de rotation correspondant aurait pour équation

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(nz^2 + m^2) - m}{n} + h.$$

L'intégrale du volume serait donc

$$\frac{\pi}{n^2}\int dz\left[(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}-m+nh^2\right],$$ ou en faisant $m-nh=m'$,

$$\frac{\pi}{n^2}\int dz\left[(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}-m'\right]^2=\frac{\pi}{n^2}\left[\frac{nz^3}{3}+(m^2+m'^2)z\right.$$

$$\left.-m'z(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\right]+\frac{\pi m'm^2}{n^2\sqrt{n}}\log\left[(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{n}.z\right]+C.$$

N° 82.

Pour le volume du coin - conoïde, on a

$$\frac{\pi r^2}{m}\int(m-z)dz=\pi r^2 z-\frac{\pi r^2 z^2}{2m}+C,$$

intégrale qui, prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=m$, donne $\frac{\pi r^2 m}{2}$, comme le texte l'indique.

N° 84.

(*Exemple III.*) On trouve que la surface courbe du paraboloïde, depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{3p}{4}$, est $=\frac{7\pi p^2}{6}$, et que celle du cylindre dont la base est un cercle du rayon $=\frac{\sqrt{3}.p}{2}$ et la hauteur $=\frac{3p}{4}$, est $\frac{3\sqrt{3}.p^2}{4}$.

(*Exemple IV.*) L'intégrale de la surface est

$$\frac{2\pi b}{a^2}\int dz(c^2z^2+2ac^2z+a^2b^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi b}{a^2}(z+a)(c^2z^2+2ac^2z+a^2b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{a^2b\pi}{c}\log\left[-(cz+ac)+(c^2z^2+2ac^2z+a^2b^2)^{\frac{1}{2}}\right]+C.$$

(*Exemple V.*) Intégrant, on trouve par les n°s 63 et 65

$$\frac{\pi}{r^2}\int dt\left(\frac{7r^4}{16}+4t^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi t}{r^2}\left(\frac{7r^4}{64}+t^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{7r^2\pi}{64}\log\left[\left(\frac{7r^4}{64}+t^2\right)^{\frac{1}{2}}-t\right]+C.$$

En développant l'intégrale $\frac{\pi}{r^2}\int dt\left(\frac{7r^4}{16}+4t^2\right)^{\frac{1}{2}}$ en série, elle se changerait en

$$\frac{\pi\cdot 7^{\frac{1}{2}}}{4}\int dt+\frac{2.4.\pi}{(7r^4)^{\frac{1}{2}}.r^2}\int t^2dt-\frac{2.4^3.\pi}{(7r^4)^{\frac{3}{2}}.r^2}\int t^4dt+\ldots.$$

L'auteur propose enfin de développer les intégrales des surfaces courbes de quelques corps de révolution du n° 81, dont les expressions sont transcendantes et qui ne s'obtiennent pour cela algébriquement, que par approximation, au moyen des séries. Reprenons, pour en rapporter un exemple, l'équation du corps considéré dans la note sur le n° 81, problème 2, lequel a pour équation

$$u=\frac{(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}-m}{n}.$$

On a ici

$$\frac{du}{dz}=\frac{z}{(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \left[1+\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{(n+1)z^2+m^2}{nz^2+m^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

l'expression de la surface courbe de ce solide est donc

$$=\frac{2\pi}{n}\int dz[(n+1)z^2+m^2]^{\frac{1}{2}}-\frac{2\pi m}{n}\int\frac{[(n+1)z^2+m^2]^{\frac{1}{2}}dz}{(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or, on a, par le n° 16,

$$[(n+1)z^2+m^2]^{\frac{1}{2}} = m\left[1 + \frac{(n+1)z^2}{2m^2} - \frac{(n+1)^2z^4}{8.m^4} + \frac{(n+1)^3z^6}{16.m^6} - \ldots\ldots\right],$$

donc,

$$-\frac{2\pi m}{n}\int\frac{[(n+1)z^2+m^2]^{\frac{1}{2}}dz}{(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2\pi m^2}{n}\int\frac{dz}{(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\frac{\pi(n+1)}{n}\int\frac{z^2dz}{(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\pi(1+n)^2}{4nm^2}\int\frac{z^4dz}{(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\frac{\pi(1+n)^3}{8nm^4}\int\frac{z^6dz}{(nz^2+m^2)^{\frac{1}{2}}} + \ldots,$$

intégrales dont les termes du second membre s'intégreront par le n° 65.

Pour la surface courbe du corps considéré au problème 3 du n° 81, lequel a pour équation

$$u = h + r + (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}},$$

on trouve

$$2\pi\int\left[\frac{(h+r)r}{(r^2-z^2)^{\frac{1}{2}}} + r\right]dz = 2\pi rz$$
$$+ 2\pi(h+r).r.\text{arc}\left(\sin = \frac{z}{r}\right) + C.$$

N° 85.

En prenant les différentielles du troisième et du quatrième ordre de l'équation $x^2y - y^2x = c$, on obtient

$$6p(1-p)+6q(x-y-xp)+r(x^2-2xy)=0,$$
$$12q-24pq-6q^2x+8r(x-y-xp)+s(x^2-2xy)=0.$$

En différentiant successivement l'équation..... $x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=c$, on obtient

$$\frac{y^2+2x^2+xyp}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=0, \text{ ou } y^2+2x^2+xyp=0,$$
$$3yp+p^2x+4x+xyq=0,$$
$$4yq+4p^2+4+3pqx+xyr=0,$$
$$5yr+15pq+3q^2x+4xpr+yxs=0.$$

N° 87.

(*Exemple III.*) De l'équation différentielle..... $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$, on tire l'intégrale

$$\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)=\text{C}, \text{ d'où } \frac{x}{y}=c, \text{ ou } cy=x,$$

équation de la ligne droite.

(*Exemple IV.*) De l'équation différentielle

$$\frac{(2x^2+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=0,$$

on tire l'intégrale

$$x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=c.$$

(*Exemple V.*) De $\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+\mathrm{d}y\left[1+\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]=0,$

on déduit l'intégrale $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+y=c.$

N° 88.

(*Problème* 1.) En mettant dans l'équation

$$a\mathrm{d}x + a'\mathrm{d}y + (mx + ny).\left(\mathrm{d}x + \frac{m'}{m}\mathrm{d}y\right) = 0,$$

$mx + ny = z$, d'où $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z}{n} + \frac{m}{n}\mathrm{d}x$, l'équation se change en

$$m\mathrm{d}x + \frac{(a'm + m'z)\mathrm{d}z}{na - a'm + (n - m')z} = 0,$$

dont on trouve l'intégrale par les n°s 59 et 60.

(*Problème* 2.) Si $P = x^2$, $Q = x$, $R = x^m$, on tombe sur l'équation différentielle

$$x^2y^{m-1}\mathrm{d}y + xy^m\mathrm{d}x = x^my^n\mathrm{d}x,$$

qui, traitée d'après la méthode indiquée au texte, conduit à l'intégrale

$$\frac{(2m - n - 1)}{m - n}(yx)^{m-n} - x^{2m-n-1} = C.$$

(*Problème* 3.) La condition pour que le facteur renferme seulement y, n'est remplie que quand l'expression $\frac{1}{P}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\right)$ renferme seulement y.

L'équation $\mathrm{d}y + Py\mathrm{d}x = Q\mathrm{d}x$, ou $(Py - Q)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$, où P et Q ne renferment que x, satisfait à l'équation de condition $\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$, laquelle se réduit par là à $\frac{\mathrm{d}z}{z} = P\mathrm{d}x$. Ainsi, on a pour le facteur $z = e^{\int P\mathrm{d}x}$.

$$6p(1-p)+6q(x-y-xp)+r(x^2-2xy)=0,$$
$$12q-24pq-6q^2x+8r(x-y-xp)+s(x^2-2xy)=0.$$

En différentiant successivement l'équation..... $x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=c$, on obtient

$$\frac{y^2+2x^2+xyp}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=0, \text{ ou } y^2+2x^2+xyp=0,$$
$$3yp+p^2x+4x+xyq=0,$$
$$4yq+4p^2+4+3pqx+xyr=0,$$
$$5yr+15pq+3q^2x+4xpr+yxs=0.$$

N° 87.

(*Exemple III.*) De l'équation différentielle..... $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$, on tire l'intégrale

$$\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)=C, \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{y}=c, \quad \text{ou} \quad cy=x,$$

équation de la ligne droite.

(*Exemple IV.*) De l'équation différentielle

$$\frac{(2x^2+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=0,$$

on tire l'intégrale

$$x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=c.$$

(*Exemple V.*) De $\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+\mathrm{d}y\left[1+\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]=0,$

on déduit l'intégrale $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+y=c.$

N° 88.

(*Problème* 1.) En mettant dans l'équation

$$adx + a'dy + (mx + ny)\cdot\left(dx + \frac{m'}{m}dy\right) = 0,$$

$mx + ny = z$, d'où $dy = \frac{dz}{n} + \frac{m}{n}dx$, l'équation se change en

$$mdx + \frac{(a'm + m'z)dz}{mn - a'm + (n - m')z} = 0,$$

dont on trouve l'intégrale par les n°s 59 et 60.

(*Problème* 2.) Si $P = x^n$, $Q = x$, $R = x^m$, on tombe sur l'équation différentielle

$$x^n y^{m-1} dy + xy^m dx = x^m y^n dx,$$

qui, traitée d'après la méthode indiquée au texte, conduit à l'intégrale

$$\frac{(2m - n - 1)}{m - n}(yx)^{m-n} - x^{2m-n-1} = C.$$

(*Problème* 3.) La condition pour que le facteur renferme seulement y, n'est remplie que quand l'expression $\frac{1}{P}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)$ renferme seulement y.

L'équation $dy + Pydx = Qdx$, ou $(Py - Q)dx + dy = 0$, où P et Q ne renferment que x, satisfait à l'équation de condition $\frac{dz}{z} = \frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)dx$, laquelle se réduit par là à $\frac{dz}{z} = Pdx$. Ainsi, on a pour le facteur $z = e^{\int Pdx}$.

u. En faisant ensuite usage de la méthode connue pour l'élimination, on parvient, si l'on fait pour abréger.... $h = \frac{1}{4} - \frac{c^2}{a^2}$, $\beta = \frac{u^2 + t + h}{u}$, aux deux équations suivantes du second degré

$$p^2 - \frac{4t}{\beta} p - \frac{3u}{\beta} = 0 \ldots \quad (3)$$

et

$$p^2 + \frac{\beta}{4t}\left(\frac{3u}{\beta} - 4t\right)p - \frac{u\beta}{t} = 0 \ldots \quad (4),$$

d'où, en retranchant ces équations l'une de l'autre,

$$p = \frac{4u\,(\beta^2 - 3t)}{3u\beta - 4t\beta^2 + 16t^2};$$

en substituant cette valeur dans l'équation (3) et développant le résultat par rapport à β, on obtient, après avoir divisé par β^2,

$$16u\beta^3 + 16t^2\beta^2 - 72tu\beta - 64t^3 - 27u^2 = 0 \ldots \quad (5),$$

ou

$$16u^6 + (16t^2 - 24t + 48h - 27)u^4 + 8u^2[(3t + 4t^2)(h - t) + 6h^2]$$
$$+ 16(t + h)^3 + 16t^2(t + h)^2 = 0 \ldots \quad (6).$$

N° 90.

(*Problème* 1.) Si l'on a

$$y - cx - (b^2 + a^2c^2)^{\frac{1}{2}} = u = 0,$$

on trouve

$$\frac{du}{dc} = 0 = x + \frac{a^2c}{(b^2 + a^2c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$c^2 = \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}, \quad \text{et} \quad c = \frac{-bx}{a(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

(On ne peut prendre que la valeur négative, par la même raison que dans le n° 90, exemple).

Cette valeur de c substituée dans l'équation $u = 0$, donne

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = v = 0,$$

l'équation d'une ellipse. On voit d'ailleurs que pour $a = b = n$ l'équation passe à celle du cercle, laquelle on a considérée plus haut au texte. L'équation différentielle appartenante est

$$y - px - (b^2 + a^2p^2)^{\frac{1}{2}} = u_{,} = 0.$$

L'équation $y - cx - a\left[(1+c^2)^{\frac{1}{2}} - c\right] = u = 0$ donne

$$\frac{du}{dc} = 0 = x - a + \frac{ac}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$c^2 = \frac{(a-x)^2}{2ax - x^2}, \quad \text{et} \quad c = \frac{a-x}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette valeur de c, substituée dans l'équation primitive $u = 0$ donne

$$y - (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = v = 0,$$

l'équation d'un cercle. En faisant $x = x' + a$, on retombe sur l'équation considérée au commencement de ce numéro, *exemple*.

L'équation différentielle appartenante est

$$y - px - a\left[(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - p\right] = u_{,} = 0.$$

En différentiant l'équation $x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = u = 0$, on tire de $\frac{du}{dc} = 0$, $c = -y$, d'où $x^2 + y^2 - a^2 = v = 0$.

L'équation différentielle appartenante est

$$p^2x^2 - 2xyp - x^2 - a^2p^2 = u, = 0.$$

(*Problème* 2.) Déterminons la fonction $\varphi(c)$ dans l'équation primitive $x^2 - 2cy + \varphi(c) = u = 0$, pour que celle-ci satisfasse à la solution particulière

$$x^2 + y^2 - a^2 = v = 0.$$

De $v = 0$ on tire $p = \frac{-x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, de $u = 0$, on tire $p = \frac{x}{c}$. Il faut maintenant égaler les deux valeurs de p, ce qui donne

$$\frac{-x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{c} \ldots\ldots \quad (1).$$

Les deux valeurs de y, tirées de $u = 0$ et de $v = 0$, égalées entre elles, donnent

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2 + \varphi(c)}{2c} \ldots\ldots \quad (2).$$

L'élimination de x entre les équations (1) et (2) conduit à la détermination $\phi(c) = -c^2 - a^2$, et l'on a enfin

$$x^2 - 2cy - c^2 - a^2 = u = 0,$$

équation d'une parabole dont la solution particulière est l'équation d'un cercle.

(*Problème* 3.) De l'équation

$$x^2 + 2xyp + (n^2 - x^2)p^2 = u, = 0,$$

on tire, en différentiant par rapport à p,

$$\frac{du}{dp} = xy + (n^2 - x^2)p = 0, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{-xy}{n^2 - x^2};$$

cette valeur, substituée dans $u = 0$, donne

$$y^2 + x^2 - u^2 = v = 0.$$

(*Problème 4.*) On a $y^2 - ax = v = 0$, d'où $p = \frac{a}{2y}$.

$$y - cx - \varphi(c) = u = 0, \text{ d'où } p = c;$$

donc $$y = \frac{a}{2c} \ldots\ldots (1).$$

Or on a, en égalant les valeurs de x dans les deux équations $v = 0$ et $u = 0$,

$$\frac{y^2}{a} = \frac{y - \varphi(c)}{c} \ldots\ldots (2).$$

l'élimination de y entre (1) et (2) donne $\varphi(c) = \frac{a}{4c}$; donc il viendra

$$y - cx - \frac{a}{4c} = u = 0.$$

Pour déterminer $\varphi(c)$ dans l'équation primitive.... $y^2 - cx^2 - \varphi(c) = u = 0$, pour qu'elle ait la solution particulière $y^2 = ax$, il faut égaler les valeurs de p, tirées de ces deux équations, par où l'on trouve $x = \frac{a}{2c}$. En égalant y dans les deux équations et éliminant x, on trouve enfin $\varphi(c) = \frac{a^2}{4c}$; donc

$$y^2 - cx^2 - \frac{a^2}{4c} = u = 0.$$

On voit par là que l'équation de la parabole $y^2 = ax$ est la solution particulière de l'équation de la ligne droite

$y = cx + \frac{a}{4c}$, aussi bien que celle de l'équation de l'hyperbole $y^2 = cx^2 + \frac{a^2}{4c}$.

(*Problème* 5.) De $y + cx - \frac{mc}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}} = u = 0$, on tire

$$x - \frac{m}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{du}{dc} = 0\,;$$

d'où

$$c^2 = \frac{m^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - 1\,,\quad (c^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{m^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,,\quad c = \frac{\left(m^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,;$$

en substituant ces valeurs dans $u = 0$, on trouve

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}}.$$

Pour la quadrature de cette courbe, on a (n° 72)

$\int y dx = m \int \left[1 - \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} dx$. En y faisant $\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{3}} = z$, cette intégrale se change en

$$\begin{aligned} &3m^2 \int z^2 dz\,(1-z^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{-m^2}{z}(1-z^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{m^2 z}{8}(1-z^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3m^2 z}{16}(1-z^2)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{3}{16} m^2 . \text{arc}\,(\sin = z) + C, \end{aligned}$$

intégrale qui donne, en la prenant depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, c'est-à-dire depuis $x = 0$ jusqu'à $x = m$, pour la quatrième partie de l'aire de la courbe, $\frac{3m^2\pi}{32}$; on obtient

donc pour l'aire entière, $\frac{3m^2\pi}{8}$, c'est-à-dire $\frac{3}{8}$ de l'aire d'un cercle du rayon $= m$.

Pour la rectification de la courbe, on a

$$\int(1+p^2)^{\frac{1}{2}}dx = \int\frac{m^{\frac{1}{3}}dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3.m^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{2}{3}}}{2} + C,$$

expression qui montre que la longueur de l'arc pris depuis $x = 0$ jusqu'à $x = m$, est $= \frac{3m}{2}$, ou que la longueur de l'arc entier de la courbe est $= 6m$.

Si l'angle donné était aigu, on aurait, en désignant sa tangente trigonométrique par a, d'après l'énoncé du problème,

$$y + cx - \frac{mc(a+c)}{a(1+c^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \ldots \quad (1).$$

En différentiant cette équation par rapport à c, on aura

$$\frac{a}{m}(cy - x)(1+c^2)^{\frac{1}{2}} = ac^2 - a - 2c \ldots \quad (2);$$

divisant ces deux équations l'une par l'autre, il viendra

$$c^3(y - ax) + c^2x + 2cy + ay = 0 \ldots \quad (3).$$

Il faudra maintenant éliminer c entre (3) et (1); on fera pour cela usage de la méthode connue pour l'élimination, laquelle consiste en ce qu'on retranche successivement les équations les unes des autres. Nous ne rapportons ici que le résultat.

En remplaçant $\frac{1}{a}$, $\frac{m}{y}$, $\frac{x}{y}$ respectivement par b, t, z, et en mettant, pour abréger,

$$-4-4z^2+23zb-(25+3z^2)b^2+21zb^3-20b^4=\mathrm{A},$$
$$6-15z^2+6z^4+(3z-51z^3)b+(24+144z^2+3z^4)b^2$$
$$-(188z+26z^3)b^3+(96+104z^2)b^4-144zb^5+64b^6=\mathrm{B},$$
$$-4+15z^2+15z^4-4z^6-(21z-33z^5+123z^3)b$$
$$-(4-252z^2+123z^4+z^6)b^2-(184z-5z^5-172z^3)b^3$$
$$+(32-80z^2-4z^4)b^4=\mathrm{C},$$

on obtiendra l'équation que voici :

$$t^8(1+b^2)+\mathrm{A}t^6+\mathrm{B}t^4+\mathrm{C}t^2+(1+z^2)^3$$
$$\times(1+4b^2-3bz+z^2)=0\ldots\quad(4).$$

Si l'on y fait $b=\frac{1}{a}=0$, ou qu'on suppose que l'angle donné soit droit, l'équation (4) est divisible par t^2-u^2, et l'on trouve alors

$$(t^2-u^2)^3-27z^2t^2=0,\quad \text{d'où}\quad 1=t^{\frac{2}{3}}-z^{\frac{2}{3}},$$

c'est-à-dire $y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=m^{\frac{2}{3}}$, équation que l'auteur a trouvée dans la même supposition.

(*Problème* 6.) Si l'on met dans l'équation

$$(y-x)^2-2h(x+y)+h^2=v=0$$

successivement x et y égaux à zéro, et qu'on cherche dans le premier cas la valeur correspondante de y et dans le second cas celle de x, on concevra que la parabole est coupée par les côtés AD, AC à une distance $=h$, à partir de A, ce qui montre que l'axe de la parabole divise l'angle droit en parties égales.

Si $mc=a^2$, l'équation $y=\frac{-cx}{m}+c$ se change en... $y=\frac{-c^2x}{a^2}+c$, dont la solution particulière est $xy=\frac{a^2}{4}$, équation de l'hyperbole équilatère, rapportée à ses asymptotes DA et AE.

Si $m^2 = ac$, l'équation $y = \frac{-cx}{m} + c$ se change en $y = \frac{-c^{\frac{1}{2}}x}{\sqrt{a}} + c$, dont la solution particulière est..... $x^2 = -4ay$, équation d'une parabole dont l'axe des abscisses est en DA, et dont le sommet se trouve en A.

(*Problème* 7.) Démontrons d'abord que le milieu de KL est en même temps le point de contact de la parabole qui a pour équation la solution particulière.

En différentiant les deux équations $y = c(x-h) + \frac{a}{4c}$, $y^2 = a(x-h)$, et égalant les deux valeurs de p qui en résultent, on trouve pour l'ordonnée du point de contact $y = \frac{a}{2c}$. Mais en combinant les deux équations primitives $y = c(x-h) + \frac{a}{4c}$, et $y^2 = ax$, on obtient $y = \frac{a}{2c} \pm (ah)^2$, expression des valeurs relatives des ordonnées des points K et L, dont les valeurs absolues sont par conséquent $\frac{a}{2c} + (ah)^{\frac{1}{2}}$, et $\frac{-a}{2c} + (ah)^{\frac{1}{2}}$. La moitié de la somme de ces deux ordonnées étant donc $= (ah)^{\frac{1}{2}}$, on trouvera que l'ordonnée du milieu de KL est $= \frac{a}{2c}$, même valeur que nous venons de trouver pour l'ordonnée du point de contact.

(*Sur le même problème.*) La solution particulière se serait obtenue aussi de la manière suivante.

La droite KL a pour équation $y = c(x - z)$, d'où $z = x - \frac{y}{c}$. Cette valeur, substituée dans l'équation...

$z = h - \frac{a}{4c^2}$ donne $x - \frac{y}{c} - h + \frac{a}{4c^2} = u = 0$. On en tire $y - \frac{a}{2c} = \frac{du}{dc} = 0$. L'élimination de c entre $u = 0$ et $\frac{du}{dc} = 0$ conduit à la solution particulière, rapportée au texte, $y^2 = a(x - h)$, équation qui exprime la valeur de l'aire m^2 par les coordonnées de la courbe qui a pour équation la solution particulière.

Nous nous proposons de trouver par le même procédé la solution particulière qui appartient à la section conique en général qui a pour équation $y^2 = 2ax + bx^2$. Nous avons trouvé dans la note sur le n° 73, exemple IV, pour l'aire KLAK dans la fig. 9, que nous supposons représenter aussi ici la section conique en général,

$$\text{l'aire KLAK} = m^2 = \frac{c^2}{c^2 - b}\left(x' + \frac{a}{b}\right)\left(\frac{a^2}{c^2} + 2ax' + bx'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{a^2\sqrt{-1}}{b^{\frac{3}{2}}} \text{arc}\left[\cos = \frac{c(a + bx')}{b(c^2 - b)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

En y mettant, puisque KL a pour équation $y = c(x - x')$, $x - \frac{y}{c}$ au lieu de x', on obtient

$$\frac{c^2}{c^2 - b}\left(x - \frac{y}{c} + \frac{a}{b}\right)\left[b\left(x - \frac{y}{c} + \frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a^2(c^2 - b)^{\frac{1}{2}}}{bc^4}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$- \frac{a^2\sqrt{-1}}{b^{\frac{3}{2}}} \text{arc}\left(\cos = \frac{bc\left[\frac{a}{b} + x - \frac{y}{c}\right]}{a(c^2 - b)^{\frac{1}{2}}}\right) - m^2 = u = 0.$$

De $\frac{du}{dc} = 0$, on tire

$$\frac{\mathrm{d}.\left[\frac{c}{(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\left(x+\frac{a}{b}-\frac{y}{c}\right)\right]}{\mathrm{d}c}=0,\ \text{d'où}\ c=\frac{a+bx}{y}.$$

En remettant cette valeur dans $u=0$, on trouve pour la solution particulière

$$\frac{[(a+bx)^2-by^2]^{\frac{1}{2}}.[(a+bx)^2-by^2-a^2]^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{a^2\sqrt{-1}}{b^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc}\left(\cos=\frac{[(a+bx)^2-by^2]^{\frac{1}{2}}}{a}\right)-m^2=v=0\ldots(\alpha).$$

Pour la parabole, c'est-à-dire lorsque $b=0$, les deux premiers termes de cette équation deviennent $\frac{0}{0}$. Pour trouver dans ce cas la vraie valeur, on suivra un procédé semblable à celui que nous avons suivi dans la note sur le n° 73, exemple IV. En mettant, pour abréger..... $(a+bx)^2-by^2=z^2$, on aura, si l'on fait $2ax-y^2=t^2$,

$$b=\frac{z^2-a^2}{t^2}-\frac{x^2(z^2-a^2)^2}{4t^6}+\ldots.$$

et, en introduisant arc sin à la place de arc cos, et développant cet arc en série, il viendra au lieu de l'équation (α),

$$\frac{\left\{z(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-a^2\sqrt{-1}\left[\frac{-1\sqrt{-1}}{a}(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{-1}}{6a^3}(z^2-a^2)^{\frac{3}{2}}-\ldots\right]\right\}^{\frac{2}{3}}}{\frac{z^2-a^2}{t^2}-\frac{x^2(z^2-a^2)^2}{4t^6}+\ldots.}=m^{\frac{4}{3}},$$

$$\frac{(z-a)\left[(z+a)^{\frac{1}{2}}+\frac{(z+a)^{\frac{3}{2}}}{6a}-\ldots\right]^{\frac{2}{3}}}{(z-a)\left[\frac{z+a}{t^2}-\frac{x^2(z-a)(z+a)^2}{4t^6}+\ldots.\right]}=m^{\frac{4}{3}}.$$

Divisant maintenant le numérateur et le dénominateur par $z-a$, et faisant ensuite $z=a$, valeur qui répond à celle $b=0$, on tombe sur l'équation donnée au texte, page 266, ligne 8.

Puisque dans la courbe qui a pour équation la solution particulière de la ligne droite KL, on a $c=\frac{dy}{dx}$, la valeur de c trouvée ci-dessus donne $\frac{dy}{dx}=\frac{a+bx}{y}$; en intégrant on a

$$y^2=2ax+bx^2+C,$$

d'où il suit que la courbe cherchée est une section conique et respectivement une parabole, une ellipse, ou une hyperbole, selon que la courbe proposée est l'une ou l'autre. Si c'était *p.e.* une parabole où $b=0$, la courbe cherchée aurait pour équation $y^2=2ax+C$, comme on l'a montré au texte où $C=-\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.m^{\frac{4}{3}}$, c'est-à-dire où C est déterminé par l'aire donnée $=m^2$.

Soit la courbe proposée une ellipse dont les demi-axes soient A et B, on aura

$$a=\frac{B^2}{A},\quad b=\frac{-B^2}{A^2},\quad \text{et}\quad y^2=\frac{B^2}{A^2}(2Ax-x^2)+C.$$

En y mettant $x=t+A$, on a pour la courbe qui a pour équation la solution particulière, une ellipse rapportée au centre qui a pour équation

$$A^2y^2-CA^2+B^2t^2-A^2B^2=0,$$

on voit que les deux demi-axes, représentés par A', B', seront $A'^2=\frac{A^2}{B^2}(B^2+C)$, $B'^2=B^2+C$, ce qui donne la proportion

$$A'^2:A^2=B'^2:B^2.$$

Il s'ensuit que les deux ellipses, savoir, la proposée et celle de la solution particulière, sont concentriques. Pour déterminer C et par là l'un des demi-axes, c'est-à-dire pour trouver le sommet de l'ellipse qui a pour équation la solution particulière, il faut mettre $y = 0$ dans l'équation (α) et déterminer par là x. Aussi obtiendrait-on par la valeur de l'aire de la section conique n° 73, exemple II, en mettant cette aire $= \frac{S^2}{2}$, et faisant dans la formule du numéro cité, $x' = A - A'$, $m = \frac{B^2}{A}$, $n = \frac{-B^2}{A^2}$, l'équation

$$-A'(A^2 - A'^2)^{\frac{1}{2}} + A^2.\text{arc}\left(\cos = \frac{A'}{A}\right) = \frac{A}{B}.\frac{S^2}{2}$$

par où l'on trouverait A'. Si l'aire m^2 était exprimée par un segment de cercle, la seule construction du cercle suffirait pour trouver A'.

On concevra aisément que tout ce qui a été dit ici de l'ellipse, s'étend aussi à l'hyperbole.

N° 92.

(*Exemple I.*) On a ici $y' = \frac{b}{a}(a^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}}$, $p' = \frac{-b^2x'}{a^2y'}$,

$$q' = \frac{-b^4}{a^2y'^3}, \quad h = \frac{y'}{c + x'}, \quad h' = \frac{cy'}{b^2}, \quad \frac{dh'}{dx'} = \frac{-cx'}{a^2y'},$$

$$1 + p'^2 = \frac{b^2(a^4 - c^2x'^2)}{a^4y'^2}, \quad 1 - h'p' = \frac{a^2 + cx'}{a^2},$$

$$q'(1 + h'^2) + \frac{dh'}{dx'}(1 + p'^2) = \frac{-b^2(a^4 - c^2x'^2)\ (a^2 + cx')}{a^6y'^3};$$

on trouvera donc enfin

$$y = 0, \quad x = c.$$

(*Exemple II.*) On a ici $y' = (2rx' - x'^2)^{\frac{1}{2}}$, $p' = \frac{r - x'}{y'}$, $q' = \frac{-r^2}{y'^3}$, $h = h' = \frac{y'}{x'}$, $\frac{dh'}{dx'} = \frac{-r}{x'y'}$, $1 + h'^2 = \frac{2r}{x'}$, $1 + p'^2 = \frac{-r^2}{y'^2}$.

On obtient par là

$$x = \frac{6rx' - 2x'^2}{3r} \ldots (1), \quad y = \frac{2y'}{3r}(2r - x') \ldots (2).$$

En élevant ces deux expressions au quarré, substituant à y'^2 sa valeur en x', et ajoutant ensuite les résultats, il viendra

$$\tfrac{9}{4}(y^2 + x^2) = 8rx' - 3x'^2 \ldots \quad (3).$$

En éliminant x' entre les équations (1) et (3), on obtient

$$y^4 + 2y^2\left(x^2 - 2rx + \frac{2r^2}{3}\right) + x\left(x - \frac{4}{3}r\right)^3 = 0.$$

En y faisant en même temps $r = \frac{-3a}{2}$, et $x - \frac{4r}{3} = t$, on trouve

$$y^4 + 2y^2\left(t^2 - at - \frac{a^2}{2}\right) + t^4 - 2at^3 = 0,$$

la même équation que nous avons donnée dans la note sur le n° 56, *problème* 1.

On a (fig. 19) $QS = MS.\tang QMS = p'.MS$; donc

$$MS^2 + QS^2 = MQ^2 = MS^2(1 + p'^2) = \frac{(1 + p'^2)^3}{4q'^2};$$

de là $MQ = \frac{\pm(1+p'^2)^{\frac{3}{2}}}{2q'}$, donc MQ égal à la moitié du rayon de courbure (n° 50).

Pour que les rayons parallèles entre eux tombent perpendiculairement sur l'axe des ordonnées, on n'a qu'à changer dans l'équation proposée x' en y', *et vice versâ.*

(*Exemple III.*) On a ici $y' = \frac{x'^2}{a}$, d'où $p' = \frac{2x'}{a}$, $q' = \frac{2}{a}$. On trouve $x = 0$, $y = \frac{a}{4}$, c'est-à-dire que la caustique est un point, savoir le foyer de la parabole.

Si l'on a $y'^2 = ax'$, $p' = \frac{a}{2y'}$, $q' = \frac{-a^2}{4y'^3}$; donc, d'après les formules ci-dessus,

$$x = x' + \frac{2y'^2}{a} \ldots (1), \quad y = y' - \frac{y'}{2a^2}(4y'^2 - a^2) \ldots (2).$$

De (1) on tire $y' = \left(\frac{ax}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; en substituant cette valeur dans (2), on tombe sur l'équation, rapportée au texte.....

$$y^2 = \frac{ax}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{2x}{3a}\right)^2.$$

La courbe qui correspond à cette équation est symétrique, relativement à l'axe des y, et elle s'étend depuis $x = 0$ jusqu'à $x = +\infty$; elle coupe l'axe des abscisses en deux points, savoir où $x = 0$, et où $x = \frac{9a}{4}$; elle est fermée entre $x = 0$ et $x = \frac{9a}{4}$; au-delà de la valeur de $x = \frac{9a}{4}$,

elle est composée de deux branches infinies. Lorsque $x=\frac{3a}{4}$, on a $y=\frac{a}{2}$. La valeur de $p=\frac{3a-4x}{4(3ax)^{\frac{1}{2}}}$ montre que, lorsque $x=0$, la tangente est perpendiculaire à l'axe des abscisses, et que, lorsque $x=\frac{9a}{4}$, il y a deux tangentes qui se coupent sous un angle égal au tiers d'un droit.

Pour la quadrature de cette courbe, on a

$$\int y\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\frac{2}{3(3a)^{\frac{1}{2}}}\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}-\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5.3.(3a)^{\frac{1}{2}}}+\mathrm{C},$$

intégrale qui, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{9a}{4}$, donne $\frac{27a^2}{20.\sqrt{3}}$.

Pour la rectification de la même courbe, on a

$$\int(1+p^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{(3a+4x)\mathrm{d}x}{4.(3ax)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(3ax)^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3.(3a)^{\frac{1}{2}}}+\mathrm{C},$$

intégrale qui, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{9a}{4}$, donne pour la longueur de l'arc $\frac{3.\sqrt{3}.a}{2}$.

(*Exemple IV.*) On a ici $y'^2=r^2-x'^2$, $p'=\frac{-x'}{y'}$, $q'=\frac{-r^2}{y'^3}$; donc

$$x=x'-\frac{x'y'^2}{r^2},\quad y=\frac{(r^2-x'^2)^{\frac{1}{2}}.(2x'^2+r^2)}{2r^2},$$

d'où, à cause de $(r^2x)^{\frac{1}{3}} = x'$, on tire

$$2r^2y = [r^2 - (r^2x)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{1}{2}} \cdot [2(r^2x)^{\frac{2}{3}} + r^2],$$

et enfin $$(4r^2 - r^2 + 4x^2)^3 = 27r^4x^2.$$

(*Exemple V.*) L'équation de la cycloïde (n° 54, *problème* 7)

$$x' = a.\text{arc}\left(\sin\text{vers} = \frac{y'}{a}\right) - (2ay' - y'^2)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots (\alpha),$$

donne

$$p' = \frac{(2ay' - y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y'}, \quad q' = \frac{-a}{y'^2} \ldots\ldots$$

D'après les conditions du problème, on obtient

$$x = x' - \frac{p'}{q'} = x' + \frac{y'(2ay' - y'^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \ldots\ldots (1),$$

$$y = y' + \frac{1 - p'^2}{2q'} = \frac{2ay' - y'^2}{a} \ldots\ldots (2);$$

en éliminant x' et y' entre les équations (α), (1), (2), on obtient

$$x = a.\text{arc}\left[\sin\text{vers} = 1 + \left(\frac{a - y}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - (ay - y^2)^{\frac{1}{2}} \ldots (\beta).$$

Si l'on examine attentivement les équations (α) et (β), on verra que les bases de ces deux cycloïdes sont entre elles comme 1 à 2.

N° 93.

(*Exemple I.*) On trouve

$$x = t - a\sin\frac{t}{a}, \quad y = \left[2a^2\left(1 - \cos\frac{t}{a}\right) - a^2\left(\sin\frac{t}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= a\left(1 - \cos\frac{t}{a}\right) = a.\ \sin\text{vers}\frac{t}{a};$$

de là

$$t = a.\text{arc}\left(\sin\text{vers} = \frac{y}{a}\right),\quad a\sin\frac{t}{a} = (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$x = a.\ \text{arc}\left(\sin\text{vers} = \frac{y}{a}\right) - (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

(*Exemple II.*) En faisant $m = a = b$, et mettant en même temps $\cos\frac{t}{a} = z$, les expressions de x et de y se changent en

$$x = 2a(z^2 - z)\ldots\ (1),\quad y = 2a(1 - z).(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\ldots\ (2).$$

Élevant ces deux expressions au quarré et ajoutant l'une à l'autre, on obtient $z = \dfrac{2a - (y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{2a}$,

substituant la valeur de z dans (1), on obtiendra

$$2ax = (y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}.\ [(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - 2a],$$

d'où

$$y^4 + 2y^2(x^2 - 2ax^2 - 2a^2) + x^4 - 4ax^3 = 0,$$

l'équation de la cardioïde.

Si l'on suppose que $m = a$, $a = \dfrac{b}{2}$, on a, en faisant $\cos\frac{t}{b} = z$,

$$\frac{x}{b} = 1 - 3z + 2z^3\ldots\ (1),\quad \frac{y}{b} = 2(1 - z^2)^{\frac{3}{2}}\ldots\ (2).$$

Élevant ces deux expressions au quarré et ajoutant l'une à l'autre, on obtient

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}=5-6z-3z^2+4z^3\ldots\quad(3),$$

en en retranchant l'équation (1) multipliée par 2, on a

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{2x}{b}=3(1-z^2)\ldots\quad(4).$$

En éliminant maintenant $1-z^2$ entre (4) et (2), on trouvera

$\frac{27b^4y^2}{4}=(x^2+y^2-2bx)^3$, ou en faisant $x=u+b$,

$$\frac{27b^4y^2}{4}=(u^2+y^2-b^2)^3,$$

équation donnée dans le n° 92, *exemple IV*.

(*Exemple III.*) t signifie la longueur de l'arc de la courbe proposée dont l'équation est exprimée en x' et y'. Désignant par t' la partie variable de l'intégrale..... $\int\left(1+\frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx'$, on a $t=t'+c$, où la constante arbitraire c, d'après ce qui a été rapporté au commencement de ce numéro, se détermine par le point où le mouvement est supposé commencer. D'après cela, les trois formules du texte pourront aussi s'exprimer ainsi :

$$r=t'+c,\ x=x'-(t'+c)\frac{dx'}{dt'},\ y=y'-(t'+c)\frac{dy'}{dt'}.$$

Pour l'équation $y'^2=\frac{16}{27m}x'^3$, on a

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{2x'^{\frac{1}{2}}}{(3m)^{\frac{1}{2}}},\ \int\left(1+\frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx'=\int\left(\frac{3m+4x'}{3m}\right)^{\frac{1}{2}}dx'$$

$$=\frac{m}{2}\left(\frac{3m+4x'}{3m}\right)^{\frac{3}{2}}=t'+c.$$

En y faisant $c = 0$, c'est-à-dire en mettant le commencement du mouvement de la ligne droite en A (fig. 9), et en observant que

$$\frac{dx'}{dt'} = \left(\frac{3m}{3m + 4x'}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dt'} = \frac{dy'}{dt'} = \left(\frac{4x'}{3m + 4x'}\right)^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$x = \frac{x'}{3} - \frac{m}{2}, \quad y = -\left(\frac{mx'}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où $y^2 = m\left(x + \frac{m}{2}\right)$, équation de la parabole (n° 52).

Pour la cycloïde qui a pour équation

$$x' = a \,.\, \text{arc}\left(\sin \text{vers} = \frac{y'}{a}\right) - (2ay' - y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

on a $t' + c = -2(2a)^{\frac{1}{2}} \,.\, (2a - y')^{\frac{1}{2}}$. En mettant $c = 0$, c'est-à-dire en supposant que le mouvement de la ligne droite commence en A (fig. 12), où $y' = 2a$, on a, à cause de $\frac{dy'}{dt'} = \frac{(2a - y')^{\frac{1}{2}}}{(2a)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{dx'}{dt'} = \frac{y'^{\frac{1}{2}}}{(2a)^{\frac{1}{2}}}$,

$$x = a \,.\, \text{arc}\left(\sin \text{vers} = \frac{y'}{a}\right) + (2ay' - y'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y = 4a - y',$$

d'où

$$x = a \,.\, \text{arc}\left(\sin \text{vers} = \frac{4a - y}{a}\right) + [2a(4a - y) - (4a - y)^2]^{\frac{1}{2}},$$

ou, en observant que

$$2\pi - \text{arc}\,(\sin \text{vers} = y) = +\,\text{arc}(\sin \text{vers} = y),$$

$$2\pi - x = a \,.\, \text{arc}\left(\sin \text{vers} = \frac{4a - y}{a}\right) - [2a(4a - y) - (4a - y)^2]^{\frac{1}{2}},$$

équation de la même forme que la proposée si l'on fait $2\pi - x = t$, et $4a - y = u$. Dans la figure 12, AMOK représente la cycloïde cherchée, si AM'A' est supposée représenter la cycloïde proposée ou immobile.

N° 94.

(*Exemple I.*) L'intégrale demandée est déjà donnée dans la note sur le n° 89, équation (6). Cette équation, en y faisant $c = 0$, d'où $h = \frac{1}{4}$, se change en celle-ci :

$$(u^2 - t - \tfrac{1}{2})^2 (16u^2 + 16t^2 + 8t + 1) = 0,$$

ou si, d'après les substitutions faites, on remplace t et u respectivement par $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, en

$$\left(y^2 - ax - \frac{a^2}{2}\right)(16y^2 + 16x^2 + 8ax + a^2) = 0;$$

le premier des facteurs de cette équation est précisément l'intégrale particulière pour $c = 0$.

Il n'est pas hors de propos de faire observer ici au lecteur la différence qu'il y a entre l'*intégrale particulière* et *la solution particulière*. On obtient l'*intégrale particulière* en donnant à la constante arbitraire, ajoutée à l'*intégrale générale*, une valeur invariable; mais pour obtenir la *solution particulière*, il faut y faire varier la constante arbitraire (n° 90). On voit par là que, si l'équation $\frac{du}{dc} = 0$ ne renferme que c et des constantes, la primitive $u = 0$ n'est pas susceptible de solution particulière; on parvient dans ce cas à une intégrale particulière.

Soit, par exemple, $y^2 - x^2 - 2ca + c^2 = u = 0$. On tire de $\frac{du}{dc} = 0$, $c = a$; donc, en substituant dans $u = 0$, on obtient $y^2 - x^2 - a^2 = 0$, une intégrale particulière.

(*Exemple II.*) Voyons comment on peut obtenir im-

(*Problème* 2.) Pour trouver la trajectoire appartenant à l'équation proposée $y' = mx'$, on a d'abord $p' = \frac{y'}{x'} = m$; en substituant cette valeur de p' dans l'équation.....

$a = \frac{p - p'}{1 + p'p}$, on obtient $a = \frac{p - \frac{y'}{x'}}{1 + \frac{y'}{x'}p}$; changeant maintenant x', y', en x, y, il vient $a = \frac{xp - y}{x + yp}$, équation différentielle qui conduit à l'intégrale rapportée au texte.

Pour trouver la *trajectoire orthogonale* appartenant à l'équation proposée $y'^2 = mx'$, on tombe sur l'équation différentielle $2x + py = 0$ qui, intégrée, donne $y^2 + 2x^2 = c$.

Pour trouver la trajectoire orthogonale appartenant à l'équation proposée $y'^{\alpha} = mx'^{\beta}$, on aura à intégrer l'équation différentielle $\alpha x + \beta yp = 0$. On obtiendra.... $\beta y^2 + \alpha x^2 = c$, une ellipse.

(*Problème* 4.) De l'équation proposée..... $a(x + yp) = y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$, en y faisant $y = ux$, on tire

$$p = \frac{-a^2 + (u^2a^2 - u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{u(a^2 - 1)}, \quad \int \frac{du}{p - u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$= \int \frac{u(a^2 - 1)du}{-(u^2a^2 - u^4 + a^2) + (u^2a^2 - u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}},$$

en mettant $(a^2u^2 - u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} = z$, cette intégrale se change en $\int \frac{dz}{1 - z} = -\log(1 - z)$; on aura donc $x(1 - z) - c = 0$, ou $\frac{(c - x)^2}{x^2} = z^2$, ce qui donne l'équation rapportée au texte, si l'on remet la valeur de z en x et y.

(*Problème* 6.) En mettant dans l'équation différentielle $(1+p^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{xp+y}{(2xy)^{\frac{1}{2}}}$, au lieu de y, $\frac{xt^2}{2}$, on obtient

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dt(1+t)}{2-t^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{2}+t} + \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{2}-t},$$

d'où, par l'intégration,

$$C = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{(x-y).(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}.$$

La solution particulière donne $y^2+x^2-2xy=0$, une ligne droite.

(*Problème* 7.) Soit l'arc de la courbe cherchée $=s$, l'abscisse $=x$, on a, par les conditions du problème,

$$s : \sqrt{x} = 1 : a, \quad \text{d'où} \quad ds = (dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{2a\sqrt{x}},$$

équation qui donne

$$y = \frac{1}{4a^2} \text{arc (sin vers} = 4a^2x) - \left(\frac{x}{2a^2} - x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

équation d'une cycloïde. (*Voyez* n° 54, *probl.* 7.)

N° 96.

(*Sur* (1), *exemple*). $\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax$. On a ici $X = 6ax$. On obtient successivement

$$d.\frac{dy}{dx} = 6axdx, \ \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + c, \ dy = 3ax^2dx + cdx,$$
$$y = ax^3 + cx + c'.$$

(*Sur* (2).) On tire de $x = \int \frac{dp}{P} + c$,

$$dx = \frac{dp}{P}, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{dp}{dx} = \frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = q,$$

l'équation proposée.

De $y = \int \frac{pdp}{P} + c'$ on tire $dy = \frac{pdp}{P}$, ou $pdx = \frac{pdp}{P}$, ou $dx = \frac{dp}{P}$, d'où l'on déduit, comme auparavant, la proposée.

(*Sur* (2), *Exemple.*) Pour parvenir de l'intégrale.... $8a(x-c)^3 = 9(y-c')^2$ à l'équation différentielle proposée $q = \frac{a}{p}$, il faudrait éliminer c et c' entre l'intégrale et les deux différentielles premières; mais on parvient plus facilement à l'équation différentielle de la manière suivante:

On tire de $8a(x-c)^3 = 9(y-c')^2$,

$$p = (2a)^{\frac{1}{2}}.(x-c)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{(x-c)^{\frac{1}{2}}} = q;$$

donc $pq = a$.

N° 97.

(*Problème* 2.) On obtient, par le n° 96 (2):.....

$$P = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{a},$$

$$\int \frac{dp}{P} = \int \frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = ap(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} = x - c,$$

$$\int \frac{pdp}{P} = \int \frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-a}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = y - c',$$

donc

$$(y-c')^2=\frac{a^2}{1+p^2},\quad (x-c)^2=\frac{a^2p^2}{1+p^2},$$

en éliminant p^2 entre ces deux expressions, on obtient

$$(x-c)^2=a^2-(y-c')^2,$$

équation d'un cercle du rayon $=a$, et dont le centre a pour coordonnées c et c'.

(*Problème* 3.) Si l'on met, en prenant le signe négatif de l'exposant $cy^{\pm n}$, $n=\frac{1}{2}$, on tombe sur l'équation différentielle

$$dx=\frac{dy}{(c^2y^{-1}-1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{(c^2-y)^{\frac{1}{2}}},$$ qui donne, par l'intégration, l'équation de la cycloïde.

Si l'on fait, en prenant le signe négatif de l'exposant $n=1$, on tombe sur l'équation différentielle

$$dx=\frac{dy}{(c^2y^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{ydy}{(c^2-y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

qui donne, par l'intégration, l'équation d'un cercle.

(*Problème* 4.) De la différentielle

$$y=\int\frac{4z(z-c)dz}{(a-4z)^{\frac{1}{2}}},$$

on déduit l'intégrale

$$y=\left(c-\frac{z}{2}\right).(a-4z^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{a}{4}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{2z}{\sqrt{a}}\right)+c',$$

équation d'une courbe transcendante.

(*Problème* 5). La seconde condition du problème qui est exprimée par l'équation $x-\frac{p}{q}=a$, ou $x-\frac{pdx}{dp}=a$,

ou $(x-a)\mathrm{d}p - p\mathrm{d}x = 0$, ou $\frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \frac{\mathrm{d}p}{p}$, donne par l'intégration, $\frac{p}{x-a} = c$. On a de plus

$$y = \int p\mathrm{d}x = c\int(x-a)\mathrm{d}x = \frac{cx^2}{2} - acx + c',$$

l'équation de la parabole ordinaire.

D'après la première condition du problème qui s'exprime par l'équation $y + \frac{1-p^2}{2q} = a$, on a (n° 96, 5)

$$2(y-a)p\mathrm{d}p + (1-p^2)\mathrm{d}y = 0, \text{ ou } \frac{\mathrm{d}y}{y-a} + \frac{2p\mathrm{d}p}{1-p^2} = 0.$$

On en tire

$$c(y-a) = 1-p^2, \quad \text{d'où} \quad p = [1-c(y-a)]^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$x = \int\frac{\mathrm{d}y}{p} = \int\frac{\mathrm{d}y}{[1-c(y-a)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2}{c}[1-c(y-a)]^{\frac{1}{2}} + c',$$

équation d'une parabole ordinaire.

(*Remarque.*) Si l'on chasse entre une équation différentielle de l'ordre n et sa différentielle prise par rapport à $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$, le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$, on obtient une équation différentielle de l'ordre $n-1$. En intégrant cette équation différentielle $n-1$ fois de suite, on obtient une équation primitive $v = 0$ qui est la solution particulière de l'équation primitive $u = 0$, c'est-à-dire de l'intégrale de l'équation différentielle proposée de l'ordre n. Dans ces deux équations primitives, tous les coefficiens différentiels du premier ordre, jusqu'à celui de l'ordre $n+1$, seront égaux entre eux, et les courbes correspondantes auront par conséquent entre elles un contact de l'ordre $n+1$. (*Voyez* n° 50.)

N° 98.

D'après ce qui a été dit en (1) dans ce numéro, il est facile de trouver l'équation primitive qui répond à l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = X$. L'équation primitive qu'on obtient en intégrant n fois de suite, renfermera n constantes arbitraires, et l'équation différentielle proposée est sa différentielle immédiate de l'ordre n.

Dans l'équation différentielle, considérée en (2), $r = f(q)$, il faudrait, d'après le procédé de l'auteur, intégrer séparément chacune des deux différentielles $dx = \frac{dq}{f(q)}$ et $dy = \frac{dq}{f(q)} \int \frac{q\,dq}{f(q)}$, et éliminer q entre les intégrales trouvées; mais au lieu de cela, il suffit d'intégrer seulement l'équation différentielle $dx = \frac{dq}{f(q)}$ et de déterminer dans l'intégrale q par x. On parvient par là à l'équation différentielle $\frac{d^2 y}{dx^2} = X$, où X ne renferme que x. En intégrant cette équation à l'aide de n° 96 (1), on parvient à l'équation primitive cherchée. De la même manière, on ramènera aussi l'équation différentielle générale $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$ à l'équation différentielle $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = X$, où X ne renferme que x; car à cause de $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d.\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}}{dx}$, on a

$$dx = \frac{d.\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}}{\frac{d^n y}{dx^n}} = \frac{d.\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}}{f\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)}.$$

On voit que l'on tombe ainsi sur une équation différentielle de la forme qu'on a traitée en (1) de ce numéro.

On peut faire usage de la même méthode pour intégrer l'équation différentielle traitée en (3) de ce numéro, $r = f(p)$.

Il suffit pour cela d'intégrer la première des deux équations qu'on y a rapportées, savoir l'équation différentielle $dx = \frac{dp}{[2\int f(p)dp]^{\frac{1}{2}}}$, et de déterminer dans l'intégrale p par x. L'équation différentielle $r = f(p)$ se réduit par là à l'équation $\frac{dy}{dx} = X$. On voit aisément que l'équation différentielle générale $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$ se réduit par cette méthode à l'équation $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = X$ (traitée en (1) de ce numéro), où X ne renferme que x.

Nous allons appliquer la méthode que nous venons d'exposer, à l'équation proposée en (2), $r = q^2$.

On a ici

$$dx = \frac{dq}{f(q)} = \frac{dq}{q^2}, \text{ d'où } x - c = \frac{-1}{q}, \text{ ou } q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c-x}.$$

On tire de là successivement, à l'aide du n° 96 (1),

$$\frac{dy}{dx} = c' - \log(c-x), \quad y = c'' + c'x - \int dx \log(c-x).$$

Or, on a (n° 68),

$$\int dx \log(c-x) = c - x - (c-x)\log(c-x);$$

l'équation primitive cherchée est donc, si l'on fait... $c'' - c = C$, $c' + 1 = C'$,

$$y = C + C'x + (c-x).\log(c-x).$$

On en tire

$$p = C' - 1 - \log(c - x),\quad q = \frac{1}{c - x},\quad r = \frac{1}{(c - x)^2},$$

d'où $r = q^2$, l'équation différentielle proposée.

Dans l'équation différentielle proposée en (3), $r = p^{-3}$, on a

$$f(p) = \frac{1}{p^3},\quad \int f(p)\mathrm{d}p = \int \frac{\mathrm{d}p}{p^3} = c - \frac{1}{2p^2},$$

$$[2\int f(p)\mathrm{d}p)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(c - \frac{1}{2p^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(2cp^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{p},$$

$$x = \int \frac{\mathrm{d}p}{[2\int f(p)\mathrm{d}p]^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{p\mathrm{d}p}{(2cp^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = c' + \frac{2c}{(2cp^2 - 1)^{\frac{1}{2}}};$$

de là $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{[4c^2(x - c')^2 + 1]^{\frac{1}{2}}}{(2c)^{\frac{1}{2}}}$, équation différentielle qui donne, intégrée,

$$y = \frac{x}{(2c)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{4c^2} + x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8c^2(2c)^{\frac{3}{2}}}\log\left[\left(\frac{1}{4c^2} + x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x\right] + c''.$$

N° 99.

(*Ad.* 1). On propose de trouver la valeur de l'intégrale $y = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ entre $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{3}{4}$.

On a ici

$$X = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1 + 2x^2}{(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{3x(3+2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$, etc. Si l'on fait, dans ces expressions, $x = a = \frac{1}{2}$, il vient

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}},\ A' = \frac{4}{3\sqrt{3}},\ A'' = \frac{16}{3\sqrt{3}},\ A''' = \frac{7.32}{9.\sqrt{3}} \ldots\ldots;$$

donc, à cause de $h = b - a = \frac{1}{4}$,

$$k = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{7}{12.72} + \ldots\right).$$

(*Ad.* 2, *exemple I.*) On tire aussi, de l'expression donnée par l'auteur,

$$y = ce^{-h} - a^n(e^{-h} - 1) + na^{n-1}\left(e^{-h} - 1 + \frac{h}{1}\right)$$
$$- n(n-1)a^{n-2}\left(e^{-h} - 1 + \frac{h}{1} - \frac{h^2}{1.2}\right)$$
$$+ n(n-1)(n-2)a^{n-3}\left(e^{-h} - 1 + \frac{h}{1} - \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3}\right) - \ldots,$$

ou

$$y = c + k = ce^{-h} - e^{-h}(a^n - na^{n-1} + \ldots) + a^n + na^{n-1}\left(\frac{h}{1} - 1\right)$$
$$+ n(n-1)a^{n-2}\left(\frac{h^2}{1.2} - \frac{h}{1} + 1\right) + \ldots.$$

Or, l'équation proposée $dy + ydx = x^n dx$ donne, à cause de $\int x^n e^x dx = e^x[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \ldots]$, par le n° 88, forme 2,

$$ye^x - e^x[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \ldots] = C.$$

Faisant ici successivement $x = a$, $y = c$, et $x = b$, $y = c + k$, et retranchant les équations trouvées par là, l'une de l'autre, on obtient

$$c + k = ce^{-h} + b^n - nb^{n-1} + n(n-1)b^{n-2} - \ldots$$
$$- e^{-h}[a^n - na^{n-1} + n(n-1)a^{n-2} - \ldots].$$

En mettant dans cette expression $b = a + h$, on parvient, à l'aide du n° 16, à l'expression rapportée plus haut.

(2) *Exemple II.*) On a ici

$$\frac{dc}{da} = a^n - \frac{c}{a}, \quad \frac{d^2c}{da^2} = (n-1)a^{n-1} + \frac{2c}{a^2},$$

$$\frac{d^3c}{da^3} = (n-1)^2 a^{n-2} + 2a^{n-2} - \frac{6c}{a^3},$$

$$\frac{d^4c}{da^4} = (n-2)(n-1)^2 a^{n-3} + 2(n-2)a^{n-3} - 6a^{n-3} + \frac{24c}{a^4}, \text{ etc.};$$

donc

$$c + k = c + \left(a^n - \frac{c}{a}\right)h + \left[(n-1)a^{n-1} + \frac{2c}{a^2}\right]\frac{h^2}{1.2}$$

$$+ \left([(n-1)^2 + 2]a^{n-2} - \frac{6c}{a^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3}$$

$$+ \left\{[(n-1)^2(n-2) + 2(n-2) - 6]a^{n-3} + \frac{24c}{a^4}\right\}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$= c\left(1 - \frac{h}{a} + \frac{h^2}{a^2} - \frac{h^3}{a^3} + \ldots\right) + a^n h + \frac{n-1}{1.2}a^{n-1}h^2$$

$$+ \frac{(n-1)^2 + 2}{1.2.3}a^{n-2}h^3 + \frac{[(n-1)^2(n-2) + 2(n-2) - 6]}{1.2.3.4}a^{n-3}h^4 + \ldots,$$

ou, en observant que

$$\frac{a}{a+h} = \frac{a}{b} = 1 - \frac{h}{a} + \frac{h^2}{a^2} - \frac{h^3}{a^3} + \ldots,$$

$$= \frac{ca}{b} + \frac{a}{b}\left[a^n h + \frac{n+1}{2}a^{n-1}h^2 + \frac{(n+1)n}{2.3}a^{n-2}h^3 + \frac{(n+1).n.(n-1)}{2.3.4} + \ldots\right]$$

$$= \frac{ca}{b} + \frac{1}{b}\left[\frac{(a+h)^{n+2} - a^{n+2}}{n+2}\right] = \frac{ca}{b} + \frac{1}{b}\left(\frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{n+2}\right),$$

le même résultat qu'on aurait obtenu par le n° 88, forme 2, exemple, si l'on y avait pris l'intégrale entre les limites $x = a$ et $x = b$.

(*Exemple III.*) Dans l'exemple proposé.....

$d^2y + \alpha x^n y dx^2 = 0$, on a

$$\frac{d^2c}{da^2} = \alpha a^n c, \quad \frac{d^3c}{da^3} = -n\alpha a^{n-1}c - \alpha a^n \frac{dc}{da},$$

$$\frac{d^4c}{da^4} = -n(n-1)\alpha a^{n-2}c - 2n\alpha a^{n-1}\frac{dc}{da} + \alpha^2 a^{2n} c, \text{ etc.};$$

donc

$$c + k = c + \frac{dc}{da}h - \alpha a^n c\frac{h^2}{1.2} - \alpha a^{n-1}\left(nc + a\frac{dc}{da}\right)\frac{h^3}{1.2.3}$$
$$+ \frac{\alpha a^{n-2}h^4}{1.2.3.4}\left[\alpha a^{n+2}c - 2na\frac{dc}{da} - n(n-1)c\right] + \ldots.$$

En y faisant, par exemple, $n = 0$, l'équation proposée se change en $d^2y + \alpha y dx^2 = 0$, et il vient

$$c + k = c\left(1 - \frac{\alpha h^2}{1.2} + \frac{\alpha^2 h^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) + \frac{dc}{da}\left(h - \frac{\alpha h^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$
$$= c\left[\frac{e^{h\sqrt{-\alpha}} + e^{-h\sqrt{-\alpha}}}{2}\right] + \frac{dc}{da}\left[\frac{e^{h\sqrt{-\alpha}} - e^{-h\sqrt{-\alpha}}}{2\sqrt{-\alpha}}\right].$$

Or, on obtient par le n° 96 (6), pour l'intégrale seconde de l'équation $d^2y + \alpha y dx^2 = 0$,

$$y = Ce^{x\sqrt{-\alpha}} + C'e^{-x\sqrt{-\alpha}};$$

de là $$\frac{p}{\sqrt{-\alpha}} = Ce^{x\sqrt{-\alpha}} - C'e^{-x\sqrt{-\alpha}};$$

l'intégrale première est donc

$$\frac{p}{\sqrt{-\alpha}} + y = 2Ce^{x\sqrt{-\alpha}}.$$

Si l'on fait $\frac{dc}{da} = c'$, $\frac{dk}{da} = k'$, les expressions $x = a$, $y = c$, $p = c'$ et $x = b$, $y = c + k$, $p = c' + k'$ seront des valeurs correspondantes. On tire, d'après cela, de l'in-

tégrale première que nous venons de trouver,

$$\frac{c'}{\sqrt{-\alpha}}+c=2Ce^{a\sqrt{-\alpha}},\quad \frac{c'+k'}{\sqrt{-\alpha}}+c+k=2Ce^{b\sqrt{-\alpha}}\ldots(1).$$

Ces deux équations donnent

$$\frac{c'+k'}{\sqrt{-\alpha}}+c+k=e^{h\sqrt{-\alpha}}\left(\frac{c'}{\sqrt{-\alpha}}+c\right)\ldots\quad(2);$$

or, on tire de $\frac{p}{\sqrt{-\alpha}}=Ce^{x\sqrt{-\alpha}}-C'e^{-x\sqrt{-\alpha}}$,

$$\frac{c'}{\sqrt{-\alpha}}=Ce^{a\sqrt{-\alpha}}-C'e^{-a\sqrt{-\alpha}},$$

$$\frac{c'+k'}{\sqrt{-\alpha}}=Ce^{b\sqrt{-\alpha}}-C'e^{-b\sqrt{-\alpha}}.$$

En chassant C′ de ces deux expressions, il viendra

$$C\sqrt{-\alpha}\left(e^{2b\sqrt{-\alpha}}-e^{2a\sqrt{-\alpha}}\right)=(c'+k')e^{b\sqrt{-\alpha}}-c'e^{a\sqrt{-\alpha}}\ldots(3).$$

L'élimination de C et $c'+k'$ entre les équations (1), (2), (3), conduit à l'expression donnée ci-dessus pour $c+k$.

N° 100.

En prenant de l'intégrale $u-\varphi(b)=u'-b$ les deux différentielles partielles et divisant l'une par l'autre, on tombe immédiatement sur l'équation différentielle proposée, parce que la simple différentiation fait disparaître les deux constantes b, $\varphi(b)$, comme on voit dans l'exemple I de ce numéro, dans l'intégrale $z-\varphi(b)=x^2+y^2-b$. Mais on donne à l'intégrale $u-\varphi(b)=u'-b$ une autre forme, si l'on multiplie l'une des intégrales $u-a=0$, $u'-b=0$, dont elle est composée, par exemple la dernière, par la constante c; on a alors

$$u-a=cu'-cb,$$

ou en réunissant $a - cb$ et remplaçant les constantes arbitraires par d'autres constantes,

$$u - au' + f(a) = 0;$$

si l'on prend de cette expression, d'après le procédé de l'auteur, les deux différentielles partielles et que l'on élimine entre elles a, on tombe sur l'équation différentielle proposée.

D'après ce procédé, on trouve, pour l'intégrale de $z - \varphi(b) = x^2 + y^2 - b$ (*voyez* exemple I),

$$z - a(x^2 + y^2) + f(a) = 0;$$

de là, par la différentiation $p - 2ax = 0$, $q - 2ay = 0$; si l'on chasse a de ces deux équations, il vient $py - qx = 0$, l'équation différentielle proposée.

Si l'on multiplie $u - au' + f(a) = 0$ par α, fonction de x, y, z, et qu'on fasse, pour abréger, $\alpha u = \beta$, $\alpha u' = \gamma$, on obtient

$$\beta - a\gamma + \alpha f(a) = 0,$$

une troisième forme de l'intégrale.

L'élimination de a et de $f(a)$ entre cette intégrale et ses différentielles partielles, conduit à l'équation différentielle proposée.

(*Exemple IV.*) $px + qy = z$. On a ici $P = x$, $Q = y$, $R = z$; les équations auxiliaires sont donc

$$x\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x = 0, \quad x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0, \quad y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y = 0;$$

on tire des deux premières $z = ax$, $y = bx$; en faisant $a = f(b)$, l'intégrale cherchée sera

$$\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

On voit, par là, que le solide correspondant est engen-

dré par une droite, passant toujours pendant son mouvement, par l'origine des coordonnées; ce sera par conséquent un *cône* (ce mot pris dans l'acception la plus générale), dont le sommet se trouve à l'origine des coordonnées et dont le côté est la droite génératrice.

On peut donner à ce cône général une base déterminée si l'on détermine convenablement la fonction qui entre dans l'intégrale. Supposons, par exemple, qu'un plan perpendiculaire à l'axe des x, à la distance à l'origine $x=m$, coupe le solide suivant un cercle du rayon $=r$, on aura

$$\frac{y}{x}=t,\ z=xf(t),\quad x=m,\ y^2+z^2=r^2,$$

d'où, en chassant x, y, z,

$$f(t)=\frac{(r^2-m^2t^2)^{\frac{1}{2}}}{m}.$$

L'équation du solide correspondant est donc

$$y^2+z^2=\frac{r^2x^2}{m^2},$$

l'équation d'un cône droit à base circulaire. (Comparez n° 80, exemple III.)

(*Exemple V.*) $ap+bq=c$. On a ici $P=a$, $Q=b$, $R=c$; les trois équations auxiliaires sont

$$dz-\frac{c}{a}dx=0,\quad dy-\frac{b}{a}dx=0,\quad bdz-cdy=0,$$

dont les deux premières donnent

$$z=\frac{c}{a}x=m\ldots\ (1),\quad y-\frac{b}{a}x=n\ldots\ (2);$$

faisant $m=f(n)$, on obtient l'intégrale cherchée

$$z-\frac{c}{a}x=f\left(y-\frac{b}{a}x\right).$$

Les équations (1) et (2), où $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$ sont des constantes déterminées, mais m et n des constantes arbitraires, appartiennent aux projections d'une droite qu'il faut s'imaginer, se mouvant dans l'espace, de manière qu'elle ne change pas sa direction déterminée par $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire qu'elle reste toujours parallèle à elle-même. Le solide engendré ainsi, qui est le solide correspondant à l'intégrale trouvée, sera donc un *cylindre* (ce mot pris dans l'acception la plus générale), ayant pour côté la droite génératrice. Si $c=0$, la droite est pendant son mouvement toujours parallèle au plan des xy; si $b=0$, elle est toujours parallèle au plan des zy.

La fonction dans l'intégrale se détermine comme dans l'exemple précédent. Soit, par exemple, l'intersection du solide avec un plan mené par l'origine des coordonnées perpendiculairement sur l'axe des x, une parabole ordinaire, on aura

$$y-\frac{b}{a}x=t,\quad z-\frac{c}{a}x=f(t),\quad x=0,\quad z=Ay^2,$$

d'où l'on tire $f(t)=At^2$. Le cylindre déterminé aura donc pour équation

$$z-\frac{c}{a}x=A\left(y-\frac{b}{a}x\right)^2.$$

N° 101.

Les trois équations auxiliaires, rapportées au texte, donnent, par l'intégration, trois équations primitives renfermant x, y, z, q et trois constantes arbitraires. Si l'on élimine entre elles q et une constante arbitraire, on parvient à une équation primitive renfermant x, y, z et deux

constantes arbitraires, laquelle équation primitive est l'intégrale cherchée, puisque l'élimination de deux arbitraires, entre cette équation primitive et ses deux différentielles prises par rapport à x, z et à y, z doit nécessairement conduire à l'équation différentielle proposée.

Voici encore un autre procédé. On n'a qu'à tirer la valeur de q des intégrales des trois équations auxiliaires, et de déterminer par là p dans l'équation proposée. Mettant ensuite ces valeurs de p et de q dans l'équation différentielle générale $dz = pdx + qdy$ qui appartient à toutes les surfaces, on obtient, par une seconde intégration, l'intégrale cherchée. Le lecteur verra l'application de ces deux méthodes dans les exemples 1 et 2, où le rapport qu'il y a entre les intégrales trouvées de ces deux manières a été en même temps exposé.

(*Exemple III.*) On se fera aisément une idée nette du solide, dont l'intégrale est $(x^2 - b^2)y^2 = m^2(z - c)^2$, si l'on remplace dans l'équation donnée au n° 82 pour le coinconoïde, $m - z$, y, r, respectivement par y, $z - c$, b. On voit par là que le solide en question peut être regardé comme engendré par une droite qui se meut sur la circonférence d'une hyperbole équilatère parallèlement au plan des zy, pendant que son autre extrémité se trouve dans la droite parallèle au plan des xy à la distance $= c$.

Lorsque $c = \frac{b^2}{n}$, on obtient pour la surface enveloppante, $4m^2x^2 + n^2y^2 = 4nm^2z$, l'équation d'un cône perpendiculaire au plan des xy, l'axe duquel se trouve dans l'axe des z et dont la section parallèle au plan des xy, à la hauteur $= z'$, est une ellipse qui a pour demi-axes $\frac{2m\sqrt{z'}}{\sqrt{n}}$, et $\sqrt{nz'}$.

La seconde intégrale qu'on a trouvée appartient, comme on voit aisément, à un cône dont l'axe qui est en même

temps celui des z, est perpendiculaire au plan des xy, et dont le sommet se trouve en $z = d$. La section parallèle au plan des xy donne une ellipse.

(*Exemple IV.*) On a, d'après le n° 83, pour l'aire de la surface courbe,

$$s = \int dy \int dx (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}},$$

donc pour le solide en question,

$$s = \int dy \int dx (1 + X^2)^{\frac{1}{2}},$$

d'où l'on tire, en représentant par v l'intégrale définie de $\int dx (1 + X^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$s = \int v dy = vy + C.$$

Cherchons l'équation du solide. On tire, de l'équation différentielle proposée,

$$p = (X^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ d'où } \frac{dp}{dq} = \frac{-q}{(X^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0;$$

en substituant ces valeurs dans la troisième des trois équations auxiliaires, on obtient

$$dq = 0, \quad q = a, \quad \text{d'où} \quad p = (X^2 - a^2)^{\frac{1}{2}};$$

substituant en $dz = pdx + qdy$, il viendra

$$dz = (X^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} dx + a dy;$$

de là $z - ay - b = \int (X^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} dx$, l'intégrale cherchée.

Cette intégrale, qui se peut aussi écrire..... $z - ay - b = f(x)$ où $f(x)$ est une fonction déterminée de x, fait voir que toutes les sections de ce solide, parallèles au plan des yz, donnent des lignes droites parallèles à

elles-mêmes; ce solide est donc du nombre des *corps cylindriques*.

Pour la valeur particulière $X = mx^{\frac{1}{2}}$, on obtient l'intégrale $z - ay - b = \frac{2}{3m^2}(m^2x - a^2)^{\frac{3}{2}}$.

(*Exemple V.*) On tire de l'équation proposée.....

$$p = \frac{x}{a}q + \frac{y}{a}q^2,$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{x}{a} + \frac{2y}{a}q;$$

les trois équations auxiliaires donnent

$$\frac{adq}{q^2} = dx, \text{ d'où } q = \frac{a}{b-x}, \; p = \frac{x}{b-x} + \frac{ay}{(b-x)^2};$$

ces valeurs substituées en $dz = pdx + qdy$, conduisent à l'intégrale cherchée

$$z - c = \frac{ay}{b-x} - x - b\log(b-x).$$

La section principale et les sections secondaires parallèles au plan des yz donnent des droites; les sections parallèles au plan des xy et à celui des xz donnent des courbes transcendantes. On pourra donc s'imaginer qu'une droite parallèle au plan des zy, et qui a pour équation $z = \alpha y + \beta$, se meuve de manière que ses deux paramètres, savoir son inclinaison vers le plan des xy, laquelle est exprimée par $\alpha = \frac{a}{b-x'}$, et son ordonnée à l'origine des coordonnées, $\beta = c - x' - b\log(b-x')$ varient en même temps.

(*Exemple VI.*) On a

$$p = \frac{xz}{a^2q}, \; \frac{dp}{dq} = \frac{-xz}{a^2q^2}, \; \frac{dp}{dz} = \frac{x}{a^2q}, \; \frac{dp}{dy} = 0.$$

Les trois équations auxiliaires donnent

$$dq = \frac{xdx}{a^2}, \text{ d'où } q = \frac{x^2 - b^2}{2a^2}, \text{ de là } p = \frac{2xz}{x^2 - b^2};$$

ces valeurs substituées dans $dz = pdz + qdy$, il viendra

$$\frac{dz}{x^2 - b^2} - \frac{2xzdx}{(x^2 - b^2)^2} = \frac{dy}{2a^2};$$

on tire de cette équation, dont le premier membre est une différentielle complète, par le n° 87, l'intégrale

$$(x^2 - b^2)(y - c) = 2a^2z.$$

Pour se faire une idée nette de ce solide, on fera $y - c = v$, ce qui ne change rien dans la position respective des plans coordonnés. On a alors

$$(x^2 - b^2)v = 2a^2z, \quad \text{d'où} \quad x^2 = \frac{2a^2}{v}z + b^2;$$

lorsque v est constant, toutes les sections parallèles au plan des xz donnent des paraboles ordinaires dont les sommets se trouvent sur la droite qui a pour équation $z = \frac{-b^2}{2a^2}v$, dans le plan des vz, et dont les paramètres sont $= \frac{2a^2}{v}$.

Ce corps sera donc engendré, comme on voit aisément, si la parabole mentionnée, et dont le plan est parallèle à celui des xz, se meut avec le sommet sur la droite mentionnée, de manière que son paramètre augmente, ou, ce qui revient au même, que la parabole s'élargisse à mesure que son sommet s'approche du plan des xv, et qu'elle se confonde enfin dans le plan des xv même avec une droite, savoir avec l'axe des x; tandis qu'au-delà de ce point, le paramètre de la parabole diminue, ou, ce qui est la même chose, que la parabole se resserre des deux côtés du plan des xv, et qu'elle

s'approche de plus en plus d'une droite parallèle à l'axe des z. Le point où la parabole touche le plan des xv, lequel point, n'est autre chose que l'origine des coordonnées x, v, z, est en même temps le passage à l'opposé pour la direction des branches de la parabole.

Les sections parallèles au plan des vz ne donnent que des droites qui passent par l'axe des x.

Déduisons de l'intégrale trouvée ci-dessus, au moins une surface enveloppante. Soit pour cela $b = \sqrt{c}$; on tire de $U = 0$, $\frac{dU}{dc} = 0$ (*voyez* l'exemple I) $c = \frac{y + x^2}{2}$, et l'on trouve pour le solide particularisé $8a^2z + (x^2 - y)^2 = 0$, toutes les sections parallèles au plan des xy donnent des paraboles ordinaires dont les paramètres $= 1$.

(*Exemple VII.*) C'est par les deux équations différentielles rapportées au texte, que le lecteur connaîtra la relation qu'il y a entre les *constantes arbitraires* et les *fonctions arbitraires*, relation très importante dans la recherche ultérieure des surfaces courbes.

Si l'on traite l'équation $ap = (x + y)q$ d'après le n° 100, les trois équations auxiliaires donnent

$$adz = 0, \quad ady + (x + y)dx = 0, \quad (x + y)dz = 0.$$

La première et la troisième donnent $z = b$; la seconde donne à l'aide du n° 88, forme 2, $c = e^{\frac{x}{a}}(y + x - a)$; l'intégrale cherchée sera donc

$$e^{\frac{x}{a}}(y + x - a) = f(z).$$

Mais si l'on opère d'après le n° 101, les trois équations auxiliaires donnent

$$\frac{(x + y)}{a}.(1 - q)dx = dz, \ (1 - q)dy = -dz, (x + y).(1 - q)dq = qdz,$$

en combinant la première et la troisième, on obtient

$$\frac{adq}{q} = dx, \text{ d'où } q = e^{\frac{x-b}{a}}, \text{ et } p = \left(\frac{x+y}{a}\right)e^{\frac{x-b}{a}};$$

en substituant ces valeurs dans $dz = pdx + qdy$, on obtiendra

$$z = ye^{\frac{x-b}{a}} + \frac{1}{a}\int x dx e^{\frac{x-b}{a}} = ye^{\frac{x-b}{a}} + xe^{\frac{x-b}{a}} - ae^{\frac{x-b}{a}},$$

ou

$$z - c = e^{\frac{x-b}{a}}(y + x - a).$$

En traitant l'équation différentielle proposée $p - q = \frac{-x}{a}$ d'après le n° 100, on obtiendra, sans difficulté, l'intégrale

$$z + \frac{x^2}{2a} = f(x+y).$$

Mais en opérant d'après le n° 101, on trouvera l'intégrale

$$z - c + \frac{x^2}{2a} = b(x+y).$$

Pour examiner ce corps, on fera $x = u + ab$, supposition qui ne change rien dans la position rectangulaire des coordonnées u, y, z: on obtient ainsi

$$\frac{u^2}{2a} = c + \frac{ab^2}{2} + by - z,$$

ou, en faisant $c + \frac{ab^2}{2} = d$,

$$\frac{u^2}{2a} = d + by - z.$$

La section parallèle au plan des yz donne une droite, les sections parallèles au plan des uz et à celui de uy donnent des paraboles ordinaires. On pourra donc se figurer que la droite mentionnée en se mouvant parallèlement à elle-même et au plan des yz, engendre ce solide, lequel solide appartient par conséquent aux corps cylindriques.

(*Exemple VIII.*) Les trois équations auxiliaires donnent ici

$$\frac{2xyz}{q}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z,\quad 2q\mathrm{d}y = \mathrm{d}z,\quad 2yz\mathrm{d}q = (z+qy)\mathrm{d}z;$$

la troisième, divisée par la seconde, donne

$$\frac{yz\mathrm{d}q}{q} = z\mathrm{d}y + \frac{y\mathrm{d}z}{2},$$

d'où, en intégrant,

$$aq = yz^{\frac{1}{2}};\ \text{de là}\ q = \frac{yz^{\frac{1}{2}}}{a},\ p = axz^{\frac{1}{2}};$$

en substituant ces valeurs dans $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$, on trouve, en intégrant,

$$4az^{\frac{1}{2}} - b = a^2x + y^2.$$

FIN.

Errata.

Page vj, ligne 16, qu'on parvient, *lisez* qu'on parvient seulement
11, 18, et page 19, ligne 11, d'après le précédent, *lisez* dans ce qui précède
30, 6, égale à x, *lisez* égale à e
33, 9, $\frac{\log(1+x)}{\log(1-x)}$, *lisez* $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
6, cela par, *ponctuez* cela, par
44, 18, de ρ; pour, *lisez* de ρ pour
48, 9 en remontant, et page 49, ligne 13, on trouve, *lisez* on tire
68, 2, consécutives, *lisez* suivantes
73, 6, d'après le précédent, *lisez* d'après ce qui précède
84, 2 et 4 en remontant, portion et segment, *lisez* secteur
86, 11, elle la, *lisez* elle le
89, 14, projeter, *lisez* construire
Ib. 19, et page 90, lignes 10 et 19, ligne, *lisez* droite
90, 7 en remontant, *ponctuez* perpendicularité, avec l'axe
91, 2, ligne, *lisez* droite
94, 7, les coefficiens consécutifs, *lisez* les coefficiens différentiels successifs
96, 1, donc pour h très petite, *lisez* bien entendu qu'on fasse h assez petite
Ib. 5 en remontant, à qui, *lisez* à laquelle
125, 8, $(\quad + a)$, *lisez* $(x + a)$
207, 9, dz^2, *lisez* d^2z
243, 6, fonctions arbitraires, *lisez* fonctions indéterminées
261, 1, par laquelle, *lisez* pour laquelle
275, 19, et page 276, ligne 14, son engendrement, *lisez* sa génération
282, 19, $\cos\frac{a}{r}$, *lisez* $\cos\frac{r}{a}$
287, 4, ligne donnée, *lisez* droite donnée
320, 1, une seule et même, *lisez* une et la même
339, 16, $R = x^2 + axb = 0$, *lisez* $R = x^2 + ax + b = 0$
343, 3, $\int\frac{(z-c)\,dz}{27c^5(z^2+cz+c^2)}$, *lisez* $\int\frac{(z-2c)\,dz}{27c^5(z^2+cz+c^2)}$
352, 3 en remontant, les valeurs de C et C′, *lisez* les valeurs de C et de C′
361, 2, $-m + nh^2]$, *lisez* $-m + nh]^2$
374, 11, $t^2 - u^2$, *lisez* $t^2 - u^2$, u^2 étant $= 1 + z^2$

Page 376, ligne 14, $\left[\frac{c(a+bx')}{b(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right]$, *lisez* $\left[\frac{c(a+bx')}{a(c^2-b)^{\frac{1}{2}}}\right]$

381, 9, si l'on a $y'^2 = ax'$, *lisez* si $y'^2 = ax'$, on a

387, 2, $4a - y = u$. Dans la figure 12, *lisez* $4a - y = u$, dans la figure 12.

393, 16, $y = \int \frac{4z(z-c)\,dz}{(a-4z)^{\frac{1}{2}}}$, *lisez* $y = \int \frac{4z(z-c)\,dz}{(a-4z^2)^{\frac{1}{2}}}$

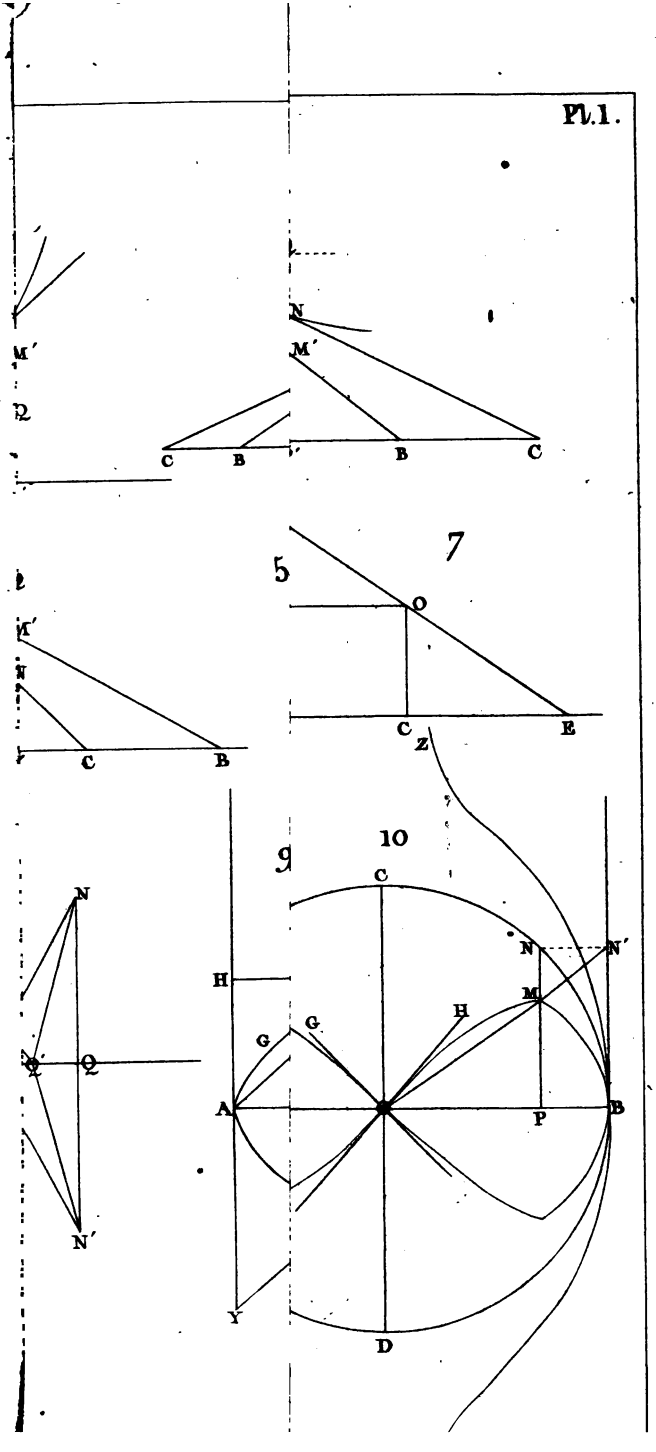
403, 3 en remont., $z = \frac{c}{a}x = m$, *lisez* $z - \frac{c}{a}x = m$

405, 8 en remontant, *supprimez* la virgule après le mot enveloppante

409, 10, $U = 0$, $\frac{dU}{dc} = 0$, *lisez* $U = 0$, et de $\frac{dU}{dc} = 0$

411, dernière, $= a^2x + y^2$, *lisez* $= a^2x^2 + y^2$

Pl. 1.



Nt

JAN 2 0 1938